

حسابان یازدهم، تابع - ۱۶ سوال -

۵- اگر $f = \{(a^2 - 2a, b^2 - 2b), (c - 8, a - 4)\}$ و $g = \{(3, c), (0, -5)\}$ دو تابع مساوی باشند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۲) ۶ یا ۵

(۱) ۱۱ یا ۶

(۴) ۵ یا ۶

(۳) ۱۱ یا ۵

آزمون ۲۲ دی

۶- اگر $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ و $g = \{(1, 0), (0, 3), (4, 4), (3, 6)\}$ باشند، تابع $fo g$ کدام است؟

(۲) $\{(5, 3), (3, 6)\}$

(۱) $\{(1, 5), (0, 4), (4, 3)\}$

(۴) $\{(5, 0), (0, 4)\}$

(۳) $\{(5, 3), (4, 6)\}$

آزمون ۲۲ دی

۷- هرگاه $f(x) = \begin{cases} 4 + 3\sqrt{x+1} & ; x > 2 \\ 2x + 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ باشد، $f^{-1}(0)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

(۴) -۱

(۳) $-\frac{1}{2}$

آزمون ۲۲ دی

۸- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، در این صورت ضابطه تابع $y = f(x) \times f(1-x)$ در دامنه اش کدام است؟

(۲) $\frac{1}{x}$

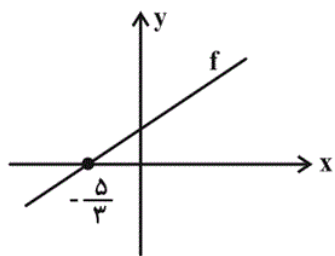
(۱) x

(۴) $1+x$

(۳) ۱

آزمون ۲۲ دی

۹- مطابق شکل، f یک تابع خطی است، اگر فاصله مبدأ مختصات از این خط یک واحد باشد، حاصل $f^{-1}(\frac{5}{7})$ کدام است؟



$-\frac{5}{7}$ (۲)

$-\frac{7}{5}$ (۱)

$\frac{5}{7}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۱۰- اگر $f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{9 - x}}$ و $g(x) = \sqrt{5 - \sqrt{9 - x}}$ باشند، دامنه تابع $f \times g$ کدام است؟

$[9, 16]$ (۲)

$(-\infty, 16]$ (۱)

$[-16, 9]$ (۴)

$[-16, 5]$ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۱۱- ضابطه تابع معکوس $f: [\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ، با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{1 - [x^2]} \right] + x^2$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$ (۲)

$f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x}, x \leq 2$ (۱)

$f^{-1}(x) = \sqrt{2 + x}, x \geq 2$ (۴)

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}, x \geq 1$ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۱۲- اگر تابع f یک به یک باشد و $f(x + 2f(x)) = f(5x + 2)$ ، در این صورت نمودار $y = (f \circ f)(x)$ محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض

قطع می‌کند؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۱۳- برد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x + 3}$ کدام است؟

(۲) $(1, \frac{3}{2})$

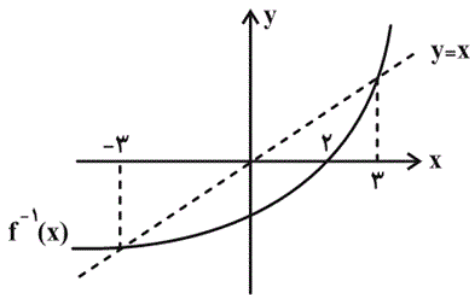
(۱) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(۴) $(1, \frac{3}{2}]$

(۳) $[1, \frac{3}{2})$

آزمون ۲۲ دی

۱۴- شکل زیر مربوط به نمودار تابع $f^{-1}(x)$ است. کدام گزینه دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{xf(x) - x^2}{f^{-1}(x)}}$ را به درستی نشان می‌دهد؟



(۱) $[-3, 0) \cup [2, 3]$

(۲) $[-3, 2)$

(۳) $[-2, 0) \cup [2, 3]$

(۴) $[-3, 0] \cup (2, 3]$

آزمون ۲۲ دی

۱۵- در کدام معادله، y بر حسب x یک تابع است؟

(۲) $|y| \sqrt[3]{x} = 1$

(۱) $|x| + |y - 1| = 1$

(۴) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$

(۳) $y^2 + 2y = x - 1$

آزمون ۲۲ دی

۱۶- اگر $f(x)$ یک تابع خطی با شیب منفی باشد و $(f \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{9}$ ، آنگاه $f(x)$ محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

(۲) -2

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) 1

(۳) $-\frac{1}{3}$

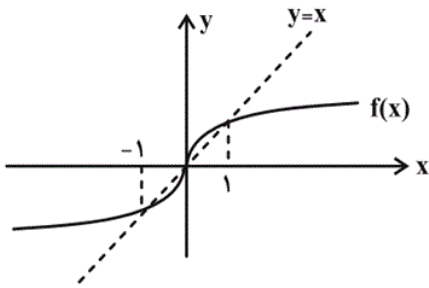
آزمون ۲۲ دی

۱۷- مساحت ناحیه بین نمودار تابع $f(x) = x[x]$ و محور x ها در بازه $[0, 2]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۲) $\frac{1}{2}$
- ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

آزمون ۲۲ دی

۱۸- با توجه به نمودار $f(x)$ که مطابق شکل زیر است، دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}}$ کدام است؟



- ۱ (۰, ۱]
- ۲ $(-\infty, 0] - \{-1\}$
- ۳ $(-1, 0]$
- ۴ $[0, +\infty) - \{1\}$

آزمون ۲۲ دی

۱۹- تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + f^{-1}(2)}{5}$ با دامنه $(-\infty, -2]$ مفروض است، مقدار $f^{-1}(\frac{19}{5})$ کدام است؟

- ۱ (۲) ۲
- ۲ (۴) -۶
- ۳ (۵) -۵

آزمون ۲۲ دی

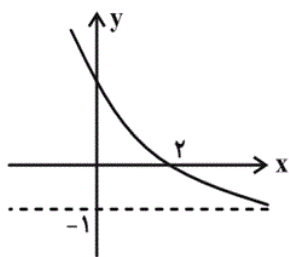
۲۰- اگر $x + \frac{1}{2} + [2x - \frac{3}{2}] = x + 4$ باشد، حاصل $[\frac{x}{2} - \frac{1}{3}]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) -۱
- ۲ (۴) ۲
- ۳ (۳) ۱

آزمون ۲۲ دی

حسابان یازدهم، توابع نمایی و لگاریتمی - ۴ سوال -

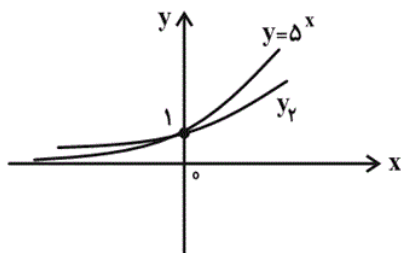
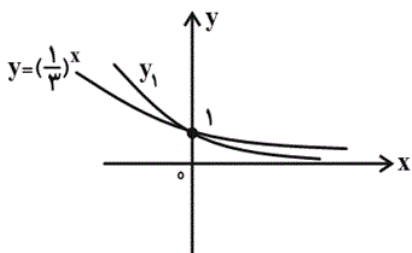
۱- نمودار تابع $f(x) = 3^{a-x} + b$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۲- با توجه به شکل‌های زیر، نمودار توابع نمایی y_1 و y_2 مربوط به کدام ضابطه‌های زیر می‌توانند باشند؟



(۱) $y_2 = 4^x$ و $y_1 = (\frac{1}{2})^x$

(۲) $y_2 = 3^x$ و $y_1 = (\frac{1}{4})^x$

(۳) $y_2 = 6^x$ و $y_1 = (\frac{1}{5})^x$

(۴) $y_2 = \sqrt{7}^x$ و $y_1 = (\frac{5}{4})^x$

آزمون ۲۲ دی

۳- در معادله $125^{x+1} = 25^{x^2-3x-1}$ ، مجموع مقادیر به دست آمده برای x کدام است؟

- ۴/۵ (۱)
- ۵ (۲)
- ۵/۵ (۳)
- ۶ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۴- مجموعه جواب نامعادله $(\frac{3}{\pi})^{x^2-2x} > (\frac{3}{\pi})^3$ بازه (a, b) است. حاصل $\frac{a+b}{2}$ کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

آزمون ۲۲ دی

هندسه یازدهم، دایره - ۷ سوال -

۲۱- یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر

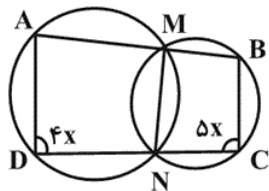
(۱) دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

(۲) مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

(۳) عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.

(۴) دایره‌ای وجود داشته باشد که از همه رأس‌های آن عبور کند.

آزمون ۲۲ دی



۲۲- در شکل مقابل اندازه زاویه \widehat{AMN} بر حسب درجه کدام است؟

۸۰ (۲)

۷۵ (۱)

۱۰۵ (۴)

۱۰۰ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۲۳- شعاع دایره محاطی خارجی نظیر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۷ و ۲۴، چند برابر شعاع دایره محاطی داخلی همین مثلث است؟

۹ (۲)

۷ (۱)

۱۴ (۴)

$\frac{28}{3}$ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۲۴- در یک مثلث متساوی الساقین، شعاع دایره محاطی خارجی نظیر قاعده نصف شعاع دایره خارجی نظیر ساق است. اگر شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث برابر ۵ باشد، شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی کدام است؟

$12/5$ (۲)

۱۰ (۱)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۲۵- مساحت دوازده ضلعی منتظم محاط درون دایره $C(O, R)$ ، چند برابر مساحت دوازده ضلعی منتظم محیط بر این دایره است؟

$\tan^2 15^\circ$ (۲)

$\cos^2 15^\circ$ (۱)

$\cot^2 15^\circ$ (۴)

$\sin^2 15^\circ$ (۳)

آزمون ۲۲ دی

۲۶- در یک مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس 120° و اندازه قاعده ۶ واحد، شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر قاعده کدام است؟

(۲) $2 + 3\sqrt{3}$

(۱) $6 + \sqrt{3}$

(۴) $2 + \sqrt{3}$

(۳) $6 + 3\sqrt{3}$

آزمون ۲۲ دی

۲۷- یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره‌ای به شعاع $R = 4$ محیط است. اگر مساحت دوزنقه برابر 80 واحد مربع باشد، محیط این دوزنقه کدام

است؟

(۲) ۴۸

(۱) ۴۰

(۴) ۶۴

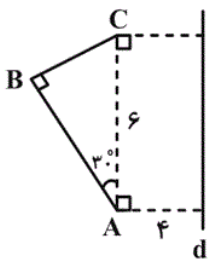
(۳) ۶۰

آزمون ۲۲ دی

هندسه یازدهم، تبدیل های هندسی و کاربردها - سوال ۳ -

۲۸- پاره‌های AB و BC و خط d مطابق شکل مفروض‌اند. اگر A', B', C' به ترتیب بازتاب نقاط A, B, C نسبت به خط d باشند،

محیط شش ضلعی $ABCC'B'A'$ کدام است؟



(۲) $22 + 6\sqrt{3}$

(۱) $18 + 6\sqrt{3}$

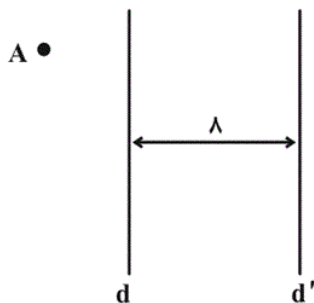
(۴) $11 + 3\sqrt{3}$

(۳) $9 + \sqrt{3}$

آزمون ۲۲ دی

۲۹- دو خط d و d' موازی یکدیگر و به فاصله ۸ واحد از یکدیگر و نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط d مفروض‌اند. تبدیل‌های T و S به ترتیب بازتاب

نسبت به خط‌های d و d' و $T(A) = A_1$ باشد، فاصله $T(S(A_1))$ از نقطه A ، چند واحد است؟



(۲) ۵

(۱) ۳

(۴) ۱۰

(۳) ۸

آزمون ۲۲ دی

(۱) تبدیلی که هر نقطه مانند $A(x, y)$ را به نقطه $A'(x-1, y+2)$ تصویر می‌کند.

(۲) تبدیلی که هر نقطه مانند $B(x, y)$ را به نقطه $B'(-x, -y)$ تصویر می‌کند.

(۳) تبدیلی که هر نقطه مانند $C(x, y)$ را به نقطه $C'(y, x)$ تصویر می‌کند.

(۴) تبدیلی که هر نقطه مانند $D(x, y)$ را به نقطه $D'(x+y, x-y)$ تصویر می‌کند.

آزمون ۲۲ دی

آمار و احتمال یازدهم، آشنایی با مبانی ریاضیات - ۳ سوال -

۴۱- اگر مجموعه $A \times B$ دارای ۸ عضو و مجموعه $B \times C$ دارای ۱۳ عضو باشد، در این صورت مجموعه $C \times A$ دارای

چند عضو می‌باشد؟

- | | |
|---------|---------|
| ۵۲ (۱) | ۶۴ (۲) |
| ۱۰۴ (۳) | ۱۶۹ (۴) |

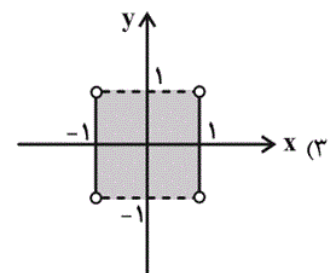
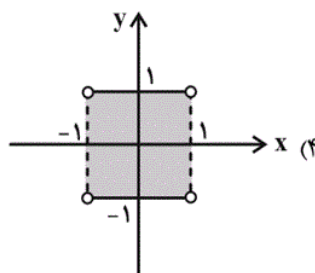
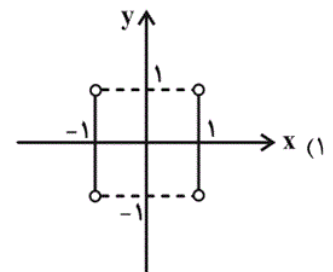
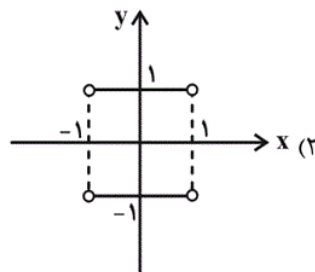
آزمون ۲۲ دی

۴۲- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |2x-1| \leq 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq \sqrt{x}\}$ باشند، مجموعه $A \times B - B^2$ چند زیرمجموعه دارد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۴ (۱) | ۸ (۲) |
| ۱۶ (۳) | ۶۴ (۴) |

آزمون ۲۲ دی

۴۳- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x|=1\}$ و $B = [-1, 1]$ باشد، نمودار $A \times B - B \times A$ کدام است؟



آزمون ۲۲ دی

۴۴- خانواده‌ای دارای سه فرزند است. در فضای نمونه فرزندان این خانواده اگر A و B به ترتیب پیشامدهایی باشند که «خانواده حداکثر یک فرزند دختر دارد» و «جنسیت فرزندان اول و آخر خانواده متفاوت است»، آن گاه پیشامد $A' \cup B'$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

آزمون ۲۲ دی

۴۵- در چه تعداد از قسمت‌های زیر، دو پیشامد ناسازگار هستند؟

الف) سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید:

A : هر سه بار رو بیاید.

B : زوج بار پشت بیاید.

ب) فردا:

A : خورشید در آسمان دیده شود.

B : باران بیارد.

پ) تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم:

B : مجموع ارقام ظاهر شده دو تاس برابر ۶ باشد.

A : دقیقاً یک بار ۶ ظاهر شود.

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

۴۶- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S ، $P(A' \cap B') = 0/3$ و $P(A - B) = 0/4$ باشد، $P(B)$ کدام است؟

- (۱) $0/2$
(۲) $0/3$
(۳) $0/4$
(۴) $0/5$

آزمون ۲۲ دی

۴۷- از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد فقط بر یکی از دو عدد ۶ یا ۸ بخش پذیر است؟

- (۱) $0/21$
(۲) $0/25$
(۳) $0/29$
(۴) $0/33$

آزمون ۲۲ دی

۴۸- چهار تیم A ، B ، C و D در یک دوره مسابقه فوتبال شرکت کرده‌اند. اگر شانس قهرمانی تیم A دو برابر تیم B و شانس قهرمانی تیم B دو برابر تیم C باشد و تیم‌های B و C هم‌شانس باشند، با کدام احتمال تیم D قهرمان نمی‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
(۲) $\frac{4}{9}$
(۳) $\frac{5}{9}$
(۴) $\frac{8}{9}$

آزمون ۲۲ دی

۴۹- در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(a) = \frac{1}{6}$ بوده و $P(a), P(b), P(c)$ و $P(d)$ جملات متوالی یک دنباله

حسابی باشند، احتمال وقوع پیشامد $\{c, d\}$ کدام است؟

$$\frac{11}{18} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} \quad (1)$$

$$\frac{13}{18} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

۵۰- در پرتاب یک تاس، احتمال رو شدن عدد n متناسب با جزء صحیح عدد $\frac{n+3}{2}$ است. در یک بار پرتاب این تاس، احتمال آنکه عددی

مضرب ۳ بیاید، کدام است؟

$$\frac{7}{18} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

هندسه یازدهم - آشنا ، دایره - ۷ سوال -

۳۱- در مثلث متساوی‌الاضلاع، مساحت دایره محیطی چند برابر مساحت دایره محاطی داخلی است؟

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{3} \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

۳۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازه وتر این مثلث کدام است؟

$$16 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$

$$18 \quad (4)$$

$$17 \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

۳۳- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایره محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، نقطه تماس، ضلع متوسط

را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$\frac{2}{9} \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

۳۴- در یک دوزنقه متساوی الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟

(۲) فقط محاطی

(۱) محاطی و محیطی

(۴) نه محاطی و نه محیطی

(۳) فقط محیطی

۳۵- چهارضلعی ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۶ واحد محیط است. اگر مساحت این چهارضلعی ABCD برابر با ۱۴۴ واحد مربع باشد،

مجموع اندازه‌های دو ضلع AB و CD چقدر است؟

(۲) ۱۲

(۱) ۶

(۴) ۴۸

(۳) ۲۴

۳۶- مساحت دایره محیطی هشت ضلعی منتظم به ضلع ۲ کدام است؟

(۲) $2\pi(2 + \sqrt{2})$

(۱) $\pi(2 + \sqrt{2})$

(۴) $4\pi(2 + \sqrt{2})$

(۳) $4\pi(1 + \sqrt{2})$

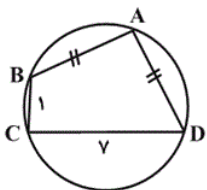
۳۷- در شکل مقابل اگر $\hat{A} = \hat{C}$ باشد، آن‌گاه طول وتر AD کدام است؟

(۱) ۴

(۲) $3\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) ۵



هندسه یازدهم - آشنا ، تبدیل های هندسی و کاربردها - ۳ سوال -

۳۸- مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را نسبت به یک خط ثابت بازتاب می‌دهیم، طوری که رأس‌های B و C نقاط ثابت این تبدیل

باشند. اگر $AB = \sqrt{2}$ و $AC = 4$ ، آن‌گاه فاصله A و A' کدام است؟ (A' بازتاب یافته A است.)

$$\frac{8}{3} \quad (2) \qquad \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (4) \qquad \frac{4}{3} \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

۳۹- دایره $C(O, 3a+5)$ و خط l به فاصله $10a$ از مرکز آن مفروض است. اگر بازتاب دایره C نسبت به خط l دایره $C'(O', 9a-1)$

باشد، اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره C و C' کدام است؟

$$16 \quad (2) \qquad 20 \quad (1)$$

$$10 \quad (4) \qquad 12 \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی

۴۰- دو خط d_1 و d_2 در نقطه O متقاطع‌اند و نقطه P به فاصله 2 از d_1 و به فاصله 3 از d_2 مفروض است. بازتاب نقطه P نسبت به d_1 را

P_1 و بازتاب P_1 نسبت به d_2 را P_2 می‌نامیم. اگر P و O و P_2 روی یک خط راست باشند، مساحت مثلث PP_1P_2 کدام است؟

$$12 \quad (2) \qquad 8 \quad (1)$$

$$4\sqrt{2} \quad (4) \qquad 6\sqrt{2} \quad (3)$$

آزمون ۲۲ دی



سوالات کانون فرهنگی آموزش قلم چی ویژه دبیران آزمون ۱۴۰۲۱۰۲۲

$$D_f = \{a^2 - 2a, c - 8\}, D_g = \{3, 0\}$$

در ابتدا باید دو تابع دامنه برابر داشته باشند، پس دو حالت داریم:

الف: $a^2 - 2a = 0, c - 8 = 3$

ب: $a^2 - 2a = 3, c - 8 = 0$

حالت (الف) را بررسی می‌کنیم:

$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } 2$$

$$, c - 8 = 3 \Rightarrow c = 11$$

$$\Rightarrow g = \{(3, 11), (0, -5)\}, f = \{(0, b^2 - 2b), (3, a - 4)\}$$

$$g(0) = -5 \Rightarrow f(0) = b^2 - 2b = -5 \Rightarrow \underbrace{b^2 - 2b + 5}_{} = 0$$

ریشه ندارد.

پس در حالت (الف) دو تابع برابر نمی‌شوند، به بررسی حالت (ب) می‌پردازیم:

$$a^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 3$$

$$, c - 8 = 0 \Rightarrow c = 8$$

$$\Rightarrow g = \{(3, 8), (0, -5)\}, f = \{(3, b^2 - 2b), (0, a - 4)\}$$

$$g(3) = 8 \Rightarrow f(3) = b^2 - 2b = 8 \Rightarrow b^2 - 2b - 8 = 0$$

$$\Rightarrow b = 4 \text{ یا } b = -2$$

$$g(0) = -5 \Rightarrow f(0) = a - 4 = -5 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow a = -1, c = 8, b = 4 \text{ یا } -2 \Rightarrow a + b + c = 11 \text{ یا } 5$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

۶- گزینه «۱»

(فخرید غلامی)

$$(fog)(0) = f(g(0)) = f(3) = \sqrt{25-9} = 4$$

$$(fog)(1) = f(g(1)) = f(0) = \sqrt{25-0} = 5$$

$$(fog)(4) = f(g(4)) = f(4) = \sqrt{25-16} = 3$$

تعریف نشده: $(fog)(3) = f(g(3)) = f(6) = \sqrt{25-36}$

$$\Rightarrow fog = \{(0, 4), (1, 5), (4, 3)\}$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۷- گزینه «۳»

(فخرید غلامی)

$$f^{-1}(0) = x \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \text{ یا } \underbrace{4 + 3\sqrt{x-1}} = 0$$

امکان ندارد، زیرا $3\sqrt{x-1} \geq 0$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

و چون $x = -\frac{1}{2}$ در شرط $x \leq 2$ صدق می‌کند، پس مورد قبول است.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

$$f(1-x) = \frac{1-x}{(1-x)-1} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow y = f(x) \times f(1-x) = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{x} = 1$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴، ۴۵ و ۶۳ تا ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

اگر $f(x) = ax + b$ باشد فاصله $(0, 0)$ از $y - ax - b = 0$ برابر یک

است، پس:

$$\Rightarrow \frac{|1(0) - a(0) - b|}{\sqrt{a^2 + 1^2}} = 1 \xrightarrow{b > 0} \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + 1 \quad (*)$$

از آنجا که در این سؤال طول از مبدأ $(-\frac{b}{a})$ برابر $-\frac{5}{3}$ است، داریم:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{3}a \xrightarrow{(*)} \left(\frac{5}{3}a\right)^2 = a^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}a^2 = a^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{c} 9 \qquad 16 \qquad 2 \\ \text{چون شیب خط } f \text{ مثبت است} \end{array} \rightarrow a = \frac{3}{4} \xrightarrow{(*)} b = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow y - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{4}{3}y - \frac{5}{3} = x$$

$$x \Leftrightarrow y \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{5}{7}\right) - \frac{5}{3} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{20}{21} - \frac{5}{3}$$

$$= \frac{20 - 35}{21} = -\frac{15}{21} = -\frac{5}{7}$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

ابتدا دامنه توابع f و g را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{9 - x}}$$

$$\begin{cases} 9 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9 \Rightarrow D_f = (-\infty, 9] \\ 5 + \sqrt{9 - x} \geq 0 \text{ (برقرار است).} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{5 - \sqrt{9 - x}}$$

$$\begin{cases} 9 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9 \\ 5 - \sqrt{9 - x} \geq 0 \Rightarrow 5 \geq \sqrt{9 - x} \\ \Rightarrow 25 \geq 9 - x \Rightarrow x \geq -16 \Rightarrow D_g = [-16, 9] \end{cases}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 9] \cap [-16, 9] = [-16, 9]$$

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۶۳ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow [x^2] \geq 2 \Rightarrow -[x^2] \leq -2$$

$$\Rightarrow 1 - [x^2] \leq -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{1 - [x^2]} < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{1 - [x^2]} \right] = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

حال ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - 1$ ($x \geq \sqrt{2}$) را پیدا می‌کنیم.

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow |x| = \sqrt{1 + y}$$

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{1 + y} \Rightarrow y \geq 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 + x}, x \geq 1$$

(مسائل ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۶۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۱۲- گزینه ۳»

(بوار؛ نکته‌های آباری)

شرط یک‌به‌یک بودن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس در این سؤال:

$$x + 2f(x) = 5x + 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow y = (f \circ f)(x) \xrightarrow[\text{تلاقی با محور } y]{x=0} y = f(f(0))$$

$$\xrightarrow{f(0)=1} y = f(1) = 3$$

(مسائل ۱- تابع - صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۳- گزینه «۴»

(مسین غفارپور)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{x^2 - 2x + 3 + 1}{x^2 - 2x + 3} = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

محدوده تغییرات تابع $y = x^2 - 2x + 3$ برابر است با عرض رأس سهمی تا

$+\infty$.

$$x^2 - 2x + 3 : x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_S = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq x^2 - 2x + 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < 1 + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$$

پس برد تابع f برابر $(1, \frac{3}{2}]$ است.

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴، ۴۵ و ۶۳ تا ۶۶)

 ۴

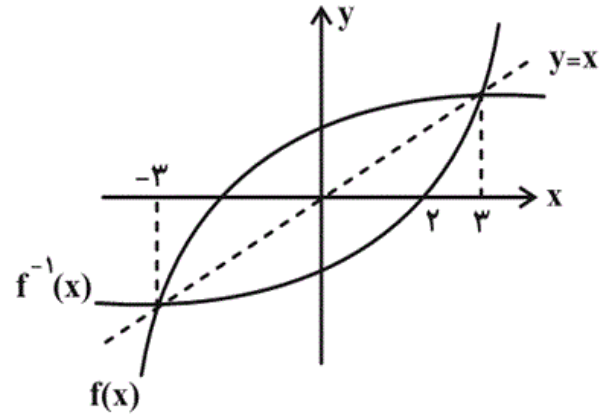
 ۳

 ۲

 ۱

نمودار f قرینه نمودار f^{-1} نسبت به خط $y = x$ است. باید:

$$\frac{xf(x) - x^2}{f^{-1}(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(f(x) - x)}{f^{-1}(x)} \geq 0$$



	-3	0	2	3
x	-	-	+	+
f(x) - x	-	+	+	-
f^{-1}(x)	-	-	-	+
	-	+	-	+
		ج	تن	

دامنه تابع: $D = [-3, 0] \cup (2, 3]$

(مسئله ۱- تابع - صفحه های ۴۴ تا ۴۸ و ۵۴ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{گزینه «۱» : } |x| + |y-1| = 1 \xrightarrow{x=0} |y-1| = 1$$

$$\Rightarrow y-1 = 1 \Rightarrow y=2 \text{ یا } y=0$$

پس در گزینه (۱) به ازای $x=0$ دو مقدار برای y حاصل شد و این رابطه، نمی‌تواند مربوط یک تابع باشد.

$$\text{گزینه «۲» : } |y| \sqrt[3]{x} = 1 \xrightarrow{x=1} |y| = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (\times)$$

$$\text{گزینه «۳» : } y^2 + 2y = x - 1 \Rightarrow (y+1)^2 = x \xrightarrow{x=1} \rightarrow$$

$$y+1 = 1 \Rightarrow y=0 \text{ یا } -2 \quad (\times)$$

$$\text{گزینه «۴» : } y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 + x^3 + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = 1 - x - x^3 \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{1-x-x^3}$$

$$\Rightarrow y = -1 + \sqrt[3]{1-x-x^3}$$

معادله به دست آمده برای هر x حقیقی جواب منحصر به فرد برای y دارد، پس این گزینه تابع است.

(مسابان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۶- گزینه «۱»

(مسین غفارپور)

ابتدا ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ را محاسبه می‌کنیم: $(f \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{9}$

$$y = \frac{x+2}{9} \Rightarrow 9y - 2 = x \Rightarrow (f \circ f)(x) = 9x - 2$$

حال می‌دانیم $f(x)$ یک تابع خطی است پس آن را به فرم $ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$(f \circ f)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 9x - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{چون شیب}} a = -3 \\ ab + b = -2 \Rightarrow -3b + b = -2 \Rightarrow -2b = -2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = -3x + 1 \Rightarrow 0 = -3x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲ و ۶۶ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۱۷- گزینه «۳»

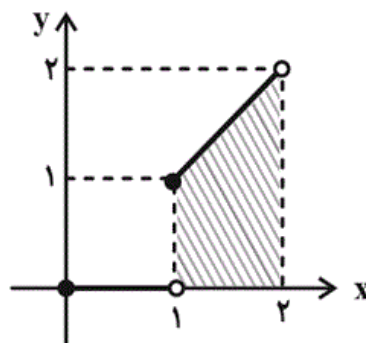
(عمید علیزاده)

$$f(x) = x[x], x \in [0, 2)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = y = x$$

$$\Rightarrow y = f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



$$S = \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{مجموع دو قاعده}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{1+2}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

(مسایان ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

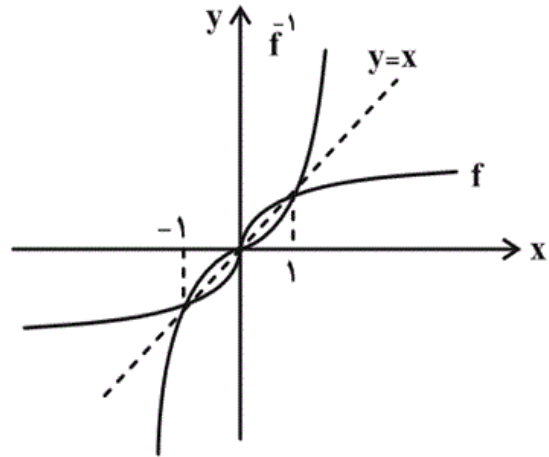
۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

نمودار f^{-1} قرینه نمودار تابع f نسبت به خط $y = x$ است، آن را رسم می‌کنیم:



$$y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}} \Rightarrow A = \frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1} \geq 0$$

عبارت A را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-1	0	1	
$f(x) - f^{-1}(x)$	+	\circ	-	\circ	+
$x^2 - 1$	+	\circ	-	\circ	+
A	+	\circ	+	\circ	-
		ج	تان	ج	تان

دامنه تابع $\Rightarrow (-\infty, 0] - \{-1\}$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۸ و ۵۳ تا ۶۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + f^{-1}(2)}{5}, \quad f^{-1}(2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2$$

$$x = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + f^{-1}(2)}{5}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + \alpha}{5} \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 10$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0 \Rightarrow (\alpha + 5)(\alpha - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \text{ غق} \\ \alpha = -5 \text{ قق} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{5}$$

توجه کنید که دامنه تابع f ، $[-2, +\infty)$ است، پس $\alpha = 2$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{19}{5}\right) = \beta \Rightarrow f(\beta) = \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{5} = \frac{\beta^2 + 2\beta - 5}{5} \Rightarrow \beta^2 + 2\beta - 5 = 19$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 2\beta - 24 = 0 \Rightarrow (\beta + 6)(\beta - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 4 \text{ غق} \\ \beta = -6 \text{ قق} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{19}{5}\right) = \beta = -6$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۵۴ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون حاصل عبارات $[2X - \frac{3}{2}]$ ، $[X + \frac{1}{2}]$ و ۴، اعدادی صحیح می‌باشند پس

X نیز باید صحیح باشد. حال چون X صحیح است پس 2X نیز صحیح است و از

جزء صحیح خارج می‌شود.

$$[X + \frac{1}{2}] + [2X - \frac{3}{2}] = X + 4$$

$$\Rightarrow X + [\frac{1}{2}] + 2X + [-\frac{3}{2}] = X + 4$$

$$\Rightarrow 3X + 0 + (-2) = X + 4 \Rightarrow 2X = 6 \Rightarrow X = 3$$

$$[\frac{X}{2} - \frac{1}{3}] = [\frac{3}{2} - \frac{1}{3}] = [\frac{7}{6}] = 1$$

(مسئله ۱- تابع - صفحه‌های ۴۹ تا ۵۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۱- گزینه «۲»

(سپار داوطلب)

تابع f نسبت به تابع $y = 3^{a-x}$ به اندازه b واحد انتقال عمودی داشته و

معادله خط‌چین افقی آن $y = -1$ شده است، پس $b = -1$. تا اینجا

$f(x) = 3^{a-x} - 1$ است و با کنترل $A(2, 0)$ داریم:

$$0 = 3^{a-2} - 1 \Rightarrow 3^{a-2} = 1 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

در نتیجه:

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

۲- گزینه «۲»

(امیر زرانروز)

به ازای X های منفی، نمودار Y_1 بالاتر از $Y = \left(\frac{1}{3}\right)^X$ قرار دارد لذا پایه تابع نمایی

Y_1 باید مثبت و کمتر از $\left(\frac{1}{3}\right)$ باشد. ضمناً برای X های مثبت، نمودار Y_2 پایین تر

از نمودار $Y = 5^X$ است پس پایه تابع نمایی Y_2 باید کمتر از ۵ باشد.

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

۳- گزینه «۱»

(امیر زرانروز)

ابتدا دو عدد ۲۵ و ۱۲۵ را تجزیه می کنیم تا پایه های دو طرف معادله، مساوی شوند

سپس توان ها را نیز مساوی قرار می دهیم:

$$5^2(x^2 - 3x - 1) = 5^3(x+1) \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2 = 3x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{مجموع ریشه ها}$$

$$= \frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{2} = 4.5$$

(مسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

۴- گزینه «۴»

(امین قربانعلی پور)

اگر $a^{r_1} > a^{r_2}$ و $0 < a < 1$ باشد، $r_1 < r_2$ است.

$$x^2 - 2x < 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) < 0$$

x	-1	3
$(x - 3)(x + 1)$	+	-
	+	+

$$\Rightarrow x \in (-1, 3) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

(سابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی - صفحه‌های ۷۲ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۲۱- گزینه «۲»

(مهم فندان)

طبق تعریف کتاب درسی، یک چهارضلعی محیطی است، اگر و تنها اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند. در چندضلعی‌های محیطی به طور کلی، نیمسازهای داخلی همه زوایا در یک نقطه هم‌رس‌اند و دایره‌ای وجود دارد که بر همه اضلاع چندضلعی محیطی مماس باشد.

(هندسه ۲- دایره - صفحه ۲۷)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۲۲- گزینه «۳»

(بابک اسلامی)

هر کدام از چهارضلعی‌های AMND و MBCN محاطی هستند، پس

مجموع اندازه زوایای مقابل در هر کدام از آنها برابر 180° است و در نتیجه داریم:

$$\hat{A}MN + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}MN = 180^\circ - 4x$$

$$\hat{B}MN + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}MN = 180^\circ - 5x$$

دو زاویه $\hat{A}MN$ و $\hat{B}MN$ مکمل یکدیگرند، پس داریم:

$$(180^\circ - 4x) + (180^\circ - 5x) = 180^\circ \Rightarrow 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$\hat{A}MN = 180^\circ - 4 \times 20^\circ = 100^\circ$$

(هنر سه ۲- دایره - صفحه ۲۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

۲۳- گزینه «۳»

(امیر حسین ابومحبوب)

اگر a طول وتر این مثلث باشد، آنگاه طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$a^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Rightarrow a = 25$$

نصف محیط این مثلث برابر است با:

$$P = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$

با توجه به مقادیر فوق داریم:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{\frac{S}{p-a}}{\frac{S}{p}} = \frac{p}{p-a} = \frac{28}{28-25} = \frac{28}{3}$$

(هنر سه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

فرض کنید r شعاع دایره محاطی داخلی، r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر قاعده و r_b شعاع دایره محاطی نظیر هر کدام از ساق‌های این مثلث باشد. در

این صورت $r_a = \frac{1}{2} r_b$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad r_b = r_c \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} r_b} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{r_b} + \frac{2}{r_b} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{4}{r_b} = \frac{1}{r} \Rightarrow r_b = 4r$$

دایره محاطی خارجی نظیر ساق‌ها، بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی این مثلث بوده و شعاع آن برابر $4r$ است.

(هندسه ۲- دایره- مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

اگر a و b به ترتیب طول اضلاع n ضلعی منتظم محاط درون دایره و محیط بر دایره به شعاع R باشند، آن گاه داریم:

$$a = 2R \sin \frac{18^\circ}{n}, \quad b = 2R \tan \frac{18^\circ}{n}$$

از طرفی به ازای هر مقدار n ($n \geq 3$)، دو n ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر مجذور نسبت اضلاع آن‌هاست، پس به ازای $n = 12$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S}{S'} &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{2R \sin 15^\circ}{2R \tan 15^\circ}\right)^2 = \left(\frac{\sin 15^\circ}{\tan 15^\circ}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin 15^\circ}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}\right)^2 = \cos^2 15^\circ \end{aligned}$$

(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

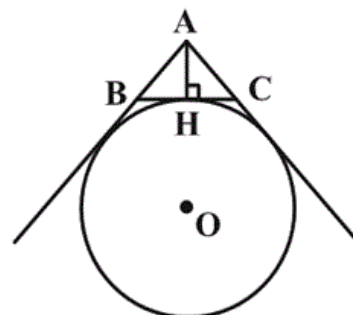
۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس بر ارتفاع و میانه نظیر قاعده منطبق است، پس مطابق شکل داریم:

$$\hat{B}AH = \hat{C}AH = 6^\circ, \quad BH = CH = 3$$



در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است،

پس داریم:

$$\Delta AHC : CH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$$

$$\Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Delta ACH : AH^2 = AC^2 - CH^2 = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 3$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$P_{ABC} = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 6}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{3\sqrt{3}}{(3 + 2\sqrt{3}) - 6}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} \times \frac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3)}{3} = 6 + 3\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

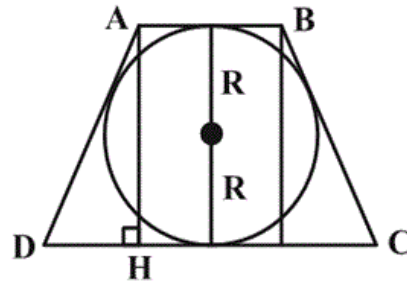
۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

مطابق شکل ارتفاع دوزنقه برابر قطر دایره محاطی دوزنقه است، پس داریم:



$$AH = 2R = 8$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AH(AB + CD)$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{1}{2} \times 8(AB + CD) \Rightarrow AB + CD = 20$$

از طرفی در یک چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است، پس داریم:

$$AD + BC = AB + CD = 20$$

$$\text{محیط دوزنقه} = 2 \times 20 = 40$$

(هنر سه ۲- رایره- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

 ۴

 ۳

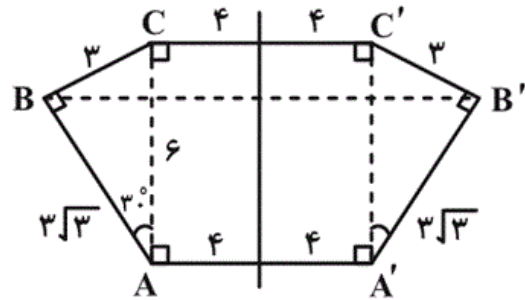
 ۲

 ۱

آزمون ۲۲ دی

در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه اضلاع روبه‌رو به زوایای 3° و 6° به ترتیب $\frac{1}{2}$ و

اندازه وتر است، پس داریم: $\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\Delta ABC: \begin{cases} \hat{A} = 3^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \\ \hat{C} = 6^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

با توجه به اینکه بازتاب تبدیلی طولی است، داریم:

$$\text{محیط شش ضلعی} = AB + BC + CC' + B'C' + A'B' + AA'$$

$$= 3\sqrt{3} + 3 + 2 \times 4 + 3 + 3\sqrt{3} + 2 \times 4 = 22 + 6\sqrt{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

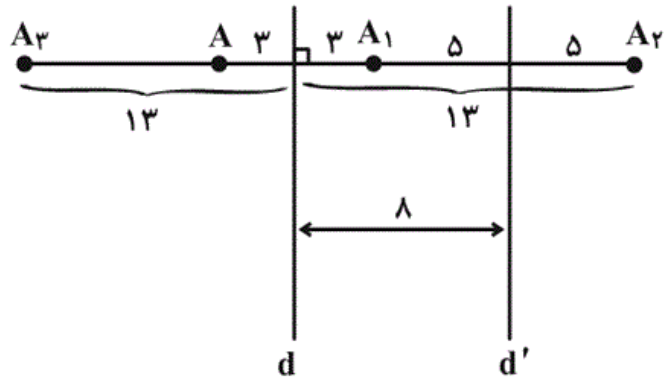
۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی



مطابق شکل A_1 (تصویر A تحت تبدیل T) به فاصله 5 واحد از خط d' قرار دارد، پس فاصله $S(A_1) = A_2$ از خط d' برابر 5 و از خط d برابر 13 است. اگر $T(A_2) = A_3$ باشد، آنگاه فاصله A_3 از خط d برابر 13 است و چون A و A_3 در یک طرف خط d واقعاند، پس فاصله این دو نقطه از یک دیگر برابر $10 = 13 - 3$ است.

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

تبدیل طولیا تبدیلی است که در آن طول یک پاره خط و طول تصویر آن پاره خط

تحت تبدیل مورد نظر یکسان باشد. در بین تبدیل های داده شده تنها تبدیل گزینه

«۴» طولیا نیست، زیرا به عنوان مثال نقض داریم:

$$D_1(1,1) \xrightarrow{T} D'_1(1+1,1-1) = (2,0)$$

$$D_2(2,2) \xrightarrow{T} D'_2(2+2,2-2) = (4,0)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 D_2 &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2} \\ D'_1 D'_2 &= \sqrt{(4-2)^2 + (0-0)^2} = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow D_1 D_2 \neq D'_1 D'_2$$

(هندسه ۲- تبدیل های هندسی و کاربردها- صفحه های ۳۴ و ۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

(مرتضی فویم علوی)

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 8$$

$$n(B \times C) = n(B) \times n(C) = 13$$

$n(B)$ در واقع یکی از مقسوم علیه های ۸ و ۱۳ می باشد که چون این دو هیچ

$$n(B) = 1$$

مقسوم علیه مشترک غیر از ۱ ندارند، پس:

$$n(B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} n(A) = 8 \\ n(C) = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(C \times A) = n(C) \times n(A) = 13 \times 8 = 104$$

(آمار و احتمال- آشنایی با مبانی ریاضیات- صفحه های ۳۰ تا ۳۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

۴۲- گزینه «۳»

(امیرحسین ابومقبوب)

ابتدای اعضای دو مجموعه A و B را به دست می آوریم:

$$|2x - 1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -1, 0, 1, 2 \Rightarrow A = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$x \leq \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 \leq x \Rightarrow x^2 - x \leq 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 0, 1$$

$$\Rightarrow B = \{0, 1\}$$

$$A \times B - B^2 = (A - B) \times B = \{-1, 2\} \times \{0, 1\}$$

$$= \{(-1, 0), (-1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$$

بنابراین مجموعه $A \times B - B^2$ دارای ۴ عضو و در نتیجه $2^4 = 16$ زیرمجموعه است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه های ۳۰ تا ۳۳)

۴

۳ ✓

۲

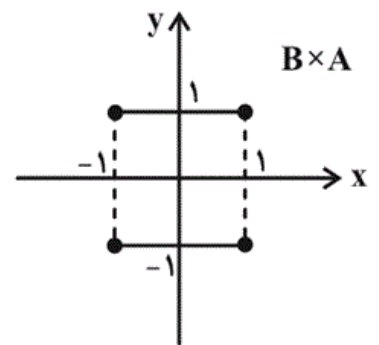
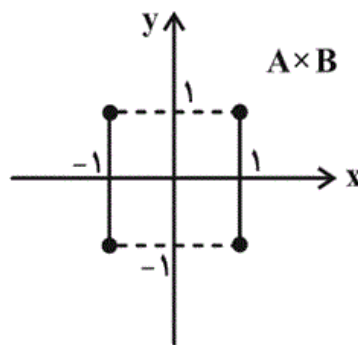
۱

آزمون ۲۲ دی

۴۳- گزینه «۱»

(فرزانه فاکپاش)

نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ و $B \times A$ مطابق شکل های زیر است.



بنابراین در نمودار $A \times B - B \times A$ تنها چهار نقطه توپر از نمودار $A \times B$ حذف شده و نمودار گزینه «۱» حاصل می شود.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات - صفحه های ۳۰ تا ۳۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

با توجه به تعریف پیشامدهای A و B داریم:

$$n(S) = 2^n = 2^3 = 8$$

$$A = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

$$B = \{(پ, پ, د), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, د, پ)\}$$

$$A \cap B = \{(پ, پ, د), (د, پ, پ)\}$$

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(S) - n(A \cap B)$$

$$= 8 - 2 = 6$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

(مرتضی فویم‌علوی)

الف) اگر در پرتاب سه سکه، هر سه بار رو بیاید، معادل آن است که صفر بار پشت

آمده باشد. چون صفر عددی زوج است، پس دو پیشامد A و B سازگارند.

ب) در یک روز خاص، ممکن است در بخشی از روز هوا آفتابی باشد و در بخش

دیگری از روز باران ببارد، پس دو پیشامد A و B سازگارند.

پ) اگر در پرتاب دو تاس، دقیقاً یکی از تاس‌ها ۶ ظاهر شده باشد، آن‌گاه مجموع

ارقام ظاهر شده دو تاس برابر ۶ نیست، پس دو پیشامد A و B ناسازگارند.

(آمار و احتمال - احتمال - مشابه کار در کلاس صفحه ۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

طبق قوانین احتمال داریم:

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

$$\Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0/3 \Rightarrow P(A \cup B) = 0/7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= (P(A) - P(A \cap B)) + P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

$$\Rightarrow 0/7 = 0/4 + P(B) \Rightarrow P(B) = 0/3$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از S باشند که اعضای آنها به ترتیب بر ۶ و ۸ بخش پذیر هستند. در این صورت داریم:

$$n(S) = 200$$

$$n(A) = \left[\frac{200}{6} \right] = 33$$

$$n(B) = \left[\frac{200}{8} \right] = 25$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{200}{24} \right] = 8$$

پیشامد بخش پذیر بودن عدد انتخابی بر فقط یکی از دو عدد ۶ یا ۸ معادل پیشامد $(A - B) \cup (B - A)$ است که با توجه به ناسازگار بودن $(A - B)$ و $(B - A)$ داریم:

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\ &= \frac{33}{200} + \frac{25}{200} - 2 \times \frac{8}{200} = \frac{42}{200} = 0.21 \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

فرض کنید شانس قهرمانی تیم D، برابر X باشد. در این صورت داریم:

$$P(B) = 2P(D) = 2x \Rightarrow \begin{cases} P(C) = P(B) = 2x \\ P(A) = 2P(B) = 4x \end{cases}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$$

$$\Rightarrow 4x + 2x + 2x + x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

احتمال قهرمان نشدن تیم D برابر است با:

$$P(D') = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲۲ دی

$$P(b) = \frac{1}{6} + x, P(c) = \frac{1}{6} + 2x, P(d) = \frac{1}{6} + 3x$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{6}\right) + (x + 2x + 3x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + 6x = 1 \Rightarrow 6x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{18}$$

$$P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = 2\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۵۰- گزینه «۲»

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$P(۱) = \left[\frac{۱+۳}{۲}\right]x = ۲x, \quad P(۲) = \left[\frac{۲+۳}{۲}\right]x = ۲x$$

$$P(۳) = \left[\frac{۳+۳}{۲}\right]x = ۳x, \quad P(۴) = \left[\frac{۴+۳}{۲}\right]x = ۳x$$

$$P(۵) = \left[\frac{۵+۳}{۲}\right]x = ۴x, \quad P(۶) = \left[\frac{۶+۳}{۲}\right]x = ۴x$$

$$P(۱) + P(۲) + \dots + P(۶) = ۱ \Rightarrow ۲(۲x + ۳x + ۴x) = ۱$$

$$\Rightarrow ۱۸x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۸}$$

$$P(\{۳, ۶\}) = P(۳) + P(۶) = ۷x = ۷ \times \frac{۱}{۱۸} = \frac{۷}{۱۸}$$

(آمار و احتمال - احتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

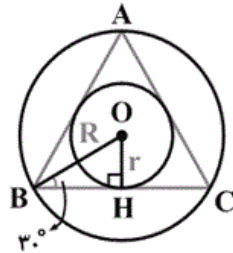
۲ ✓

۱

۳۱- گزینه ۲»

(کتاب آبی)

در مثلث متساوی الاضلاع، نقطه همرسی نیمسازهای داخلی بر نقطه همرسی عمود منصفها منطبق است. پس مراکز دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق است (نقطه O در شکل زیر). حال اگر شعاع دایره محاطی داخلی را با r و شعاع دایره محیطی را با R نشان دهیم، چون BO نیمساز زاویه B است، پس $\angle OBC = 30^\circ$ ، بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه BOH داریم:



$$\sin 30^\circ = \frac{OH}{BO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت دایره محیطی}}{\text{مساحت دایره محاطی داخلی}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$$

(هنر سه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲ ✓

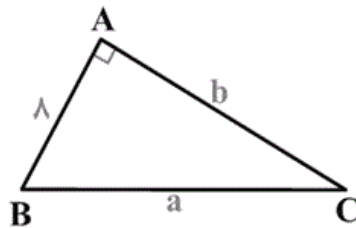
۱

آزمون ۲۲ دی

۳۲- گزینه ۳»

(کتاب آبی)

همان‌طور که در متن درسنامه اشاره شد، در هر مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره محاطی داخلی، برابر است با نصف محیط، منهای طول وتر. پس با توجه به شکل روبه‌رو، از آنجا که شعاع دایره محاطی داخلی ABC طبق فرض برابر با ۳ است، داریم:



$$3 = \frac{a+b+c}{2} - a \Rightarrow 6 = b - a + c \Rightarrow a - b = 2 \quad (*)$$

$$\text{قضیه فیثاغورس: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 64$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = 64$$

$$\xrightarrow{(*)} 2(a+b) = 64 \Rightarrow a+b = 32 \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=32 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=17 \\ b=15 \end{cases}$$

(هنر سه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳ ✓

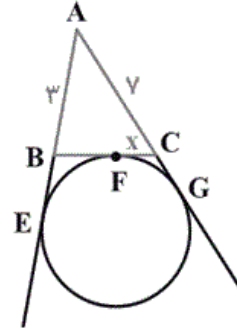
۲

۱

(کتاب آبی)

اگر $CF = x$ آنگاه $BF = 5 - x$ و چون $BF = BE$ پس

$BE = 5 - x$ از طرفی از A دو مماس بر دایره رسم شده، طول دو مماس برابرند.



$$AE = AG \Rightarrow 3 + (5 - x) = 7 + x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$BF = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۴

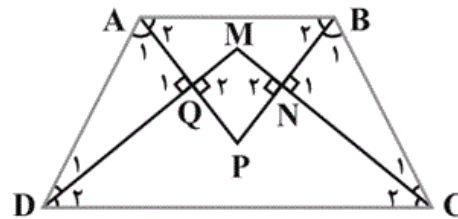
۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی)

فرض کنید چهارضلعی $MNPQ$ از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ پدید آمده باشد. در این صورت داریم:



$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\triangle AQD} \hat{Q}_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{Q}_2 = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\triangle BNC} \hat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_2 = 90^\circ$$

بنابراین $\hat{N}_2 + \hat{Q}_2 = 180^\circ$ و در نتیجه $\hat{M} + \hat{P} = 180^\circ$ است و چهارضلعی $MNPQ$ محاطی می‌باشد. از طرفی داریم:

$$\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \xrightarrow{\triangle APB} AP = BP \quad (1)$$

$$\hat{C} = \hat{D} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{D}}{2} \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow{\triangle CMD}$$

$$CM = DM \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(زضز)}} \triangle AQD \cong \triangle BNC$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AQ = BN \quad (3) \\ DQ = CN \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} DQ = CN \quad (4) \\ (1), (3) \Rightarrow AP - AQ = BP - BN \Rightarrow PQ = PN \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2), (4) \Rightarrow CM - CN = DM - DQ \Rightarrow MN = MQ \\ \Rightarrow PQ + MN = PN + MQ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow PQ + MN = PN + MQ$$

بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ محیطی نیز است.

(هندسه ۲ - دایره - صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

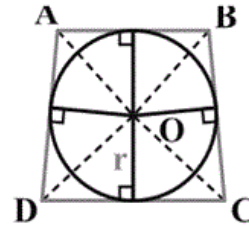
۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی



$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD}$$

$$= r \left(\frac{AB + BC + CD + AD}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 144 = 6 \left(\frac{AB + BC + CD + AD}{2} \right)$$

$$\Rightarrow AB + BC + CD + AD = 48$$

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با یکدیگر مساوی و برابر با نصف محیط است. بنابراین داریم:

$$AB + CD = \frac{48}{2} = 24$$

(هنر سه ۲- دایره - صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

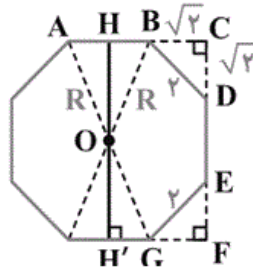
 ۱

 آزمون ۲۲ دی

۳۶- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

با توجه به شکل، مثلث‌های BCD و EFG قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین‌اند (زیرا یک زاویه 90° و دو زاویه 45° دارند) و چون اندازه وتر آن ۲ است، اندازه هر ضلع قائمه در آن‌ها برابر $\sqrt{2}$ است. در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:



$$HB = \frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$OH = \frac{HH'}{2} = \frac{CF}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OB^2 = HB^2 + OH^2 = 1^2 + (1 + \sqrt{2})^2$$

$$OB^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow R^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$

مساحت دایره محیطی با داشتن شعاع آن به راحتی قابل محاسبه است:

$$S = \pi R^2 = \pi(4 + 2\sqrt{2}) = 2\pi(2 + \sqrt{2})$$

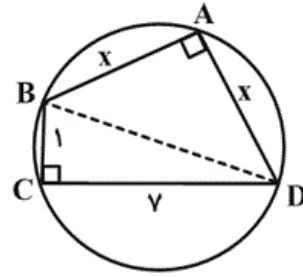
(هندسه ۲- دایره- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱



چهارضلعی ABCD محاطی است، بنابراین زاویه‌های روبه‌روی هم مکمل یکدیگرند:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \hat{C}} \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$$

$$\Delta BCD: BD^2 = 1^2 + 7^2 = 50$$

حال:

$$\Delta ABD: BD^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

(هندسه ۲ - دایره - صفحه ۲۷)

۴ ✓

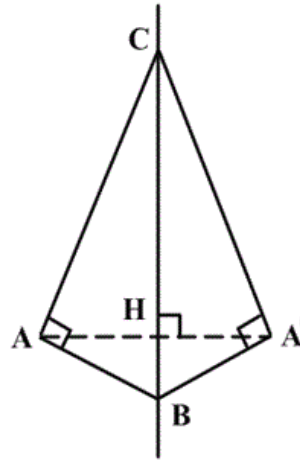
۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

چون B و C نقاط ثابت این بازتاب هستند، پس خط گذرنده از B و C همان خط بازتاب است و باید تصویر مثلث ABC تحت بازتاب نسبت به وترش را بیابیم. در نتیجه خواهیم داشت:



$$\Delta_{ABC} \text{ مساحت} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2} = AH\sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$$

$$AH = A'H \Rightarrow AA' = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

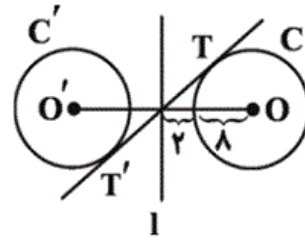
۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی



از آنجا که بازتاب ایزومتري است، لذا شعاع دو دایره با هم برابر است. پس:

$$3a + 5 = 9a - 1 \Rightarrow a = 1$$

در نتیجه:

$$10a = 10$$

$$R = R' = 8$$

$$d = OO' = 20$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \quad (\text{مماس مشترک داخلی})$$

$$= \sqrt{20^2 - (8 + 8)^2} = \sqrt{400 - 256} = 12$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳ ✓

۲

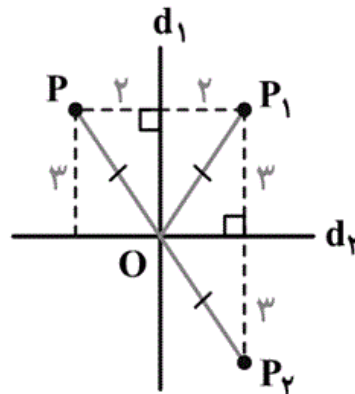
۱

آزمون ۲۲ دی

۴۰- گزینه «۲»

(کتاب آبی)

شکل مورد نظر سؤال را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل OP_1 میانه وارد بر ضلع PP_2 می‌باشد که نصف آن ضلع است.

بنابراین مثلث PP_1P_2 در رأس P_1 قائمه است. پس:

$$S_{PP_1P_2} = \frac{PP_1 \times P_1P_2}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی