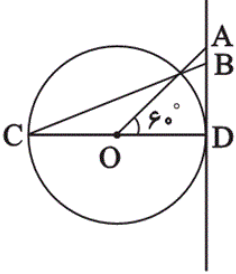


ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، **مثلثات** - ۱ سوال -

۱۲۱- با توجه به شکل، در دایره مثلثاتی زیر، طول پاره خط AB کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، **مثلثات** - ۱ سوال -

۱۲۲- اگر $\tan x = \sqrt{7}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ کدام است؟ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

(۱) $-\sqrt{7}$

(۲) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$

(۳) $-2\sqrt{7}$

(۴) $-3\sqrt{7}$

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، **حد و پیوستگی** - ۱ سوال -

۱۳۲- اگر تابع $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, a]$ ، دارای ۳ نقطه ناپیوسته و b تعداد نقاطی باشد که فقط از راست پیوسته هستند، بیشترین

مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} + 2$

(۲) $\sqrt{3} + 2$

(۳) $\sqrt{3} + 1$

(۴) $\sqrt{2} + 1$

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، **تابع** - ۱۰ سوال -

۱۱۱- اگر دامنه تابع $f(x) = -(x+1)^2 + 2$ برابر با $[a, 1]$ باشد، برد آن به صورت $[b, a+3]$ می باشد، حاصل $a-b$ برابر کدام است؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۲ (۳)

۶ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۱۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x+2 & , x \leq 0 \\ g(x) - (x+1)^2 & , x > 0 \end{cases}$ اکیداً یکنوا باشد، تابع خطی $g(x)$ کدام گزینه نمی تواند باشد؟

$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ (۱)

$g(x) = x + 3$ (۲)

$g(x) = -4x - 4$ (۳)

$g(x) = -4x + 5$ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۱۳- اگر f تابع خطی اکیداً صعودی و g تابع خطی اکیداً نزولی با دامنه \mathbb{R} باشند، دامنه تابع $y = \frac{gof(x) + x^4}{\sqrt{fog(x^3) - fog(4x)}}$ شامل چند عدد صحیح منفی نیست؟

۱ (۱)

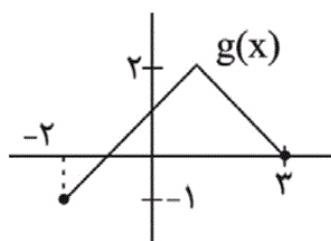
۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۱۴- اگر $f(x) = \frac{x}{x+3}$ با دامنه $[3, 6]$ و نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع $gof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۰ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۶ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۱۵- نقطه $A \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی نمودار $y = -2f(-x+3) + 4$ ، به نقطه $A' \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ روی نمودار $y = 3f(\frac{1}{3}x-3) - 1$ تبدیل می‌شود. کدام $a+2b$ است؟

- (۱) ۲۳
- (۲) ۳۲
- (۳) ۲۷
- (۴) ۲۱

آزمون ۲۲ دی

۱۱۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 0 \\ -x - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 11 & , x \geq 0 \\ -x - 4 & , x < 0 \end{cases}$ باشد، بزرگترین مجموعه جواب نامعادله $f \circ f(x) > g(x)$ به صورت $(a, b) \cup (c, +\infty)$ می‌باشد. حاصل $2a+b-c$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$
- (۲) $-\sqrt{5}$
- (۳) $1 - \sqrt{5}$
- (۴) -2

آزمون ۲۲ دی

۱۱۷- هر گاه تابع $f(x) = \sqrt{2x+m}$ وارون خود را در نقطه‌ای به طول $x=1$ قطع کند، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۳
- (۳) -۲
- (۴) ۵

آزمون ۲۲ دی

۱۱۸- هر گاه $f(x) = \begin{cases} 2-x & , x \geq 0 \\ -\frac{x}{2} + 1 & , x < -2 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ باشد، اگر $(g \circ f^{-1})(a) = 3$ ، آن گاه a کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

۱۱۹- اگر $f(x) = 2x^2 - x - 23$ و $x \geq 2$ باشد، نمودارهای دو تابع $y = f^{-1}(x)$ و $g(x) = x - 1$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از

مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{41}$
- (۲) $\sqrt{69}$
- (۳) $\sqrt{31}$
- (۴) $\sqrt{10}$

آزمون ۲۲ دی

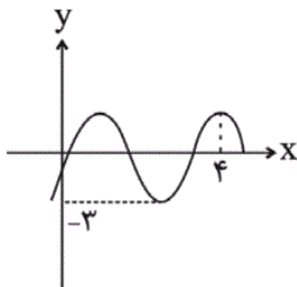
۱۲۰- اگر $f^{-1} \circ g(x) = \frac{2x+2}{x-3}$ و $g(x) = ax + 2$ ، معادله $f \circ g(x) = g(x)$ به ازای کدام مقدار a فقط یک ریشه دارد؟

- (۱) ۲
- (۲) $-\frac{22}{9}$
- (۳) ۳
- (۴) $-\frac{7}{2}$

آزمون ۲۲ دی

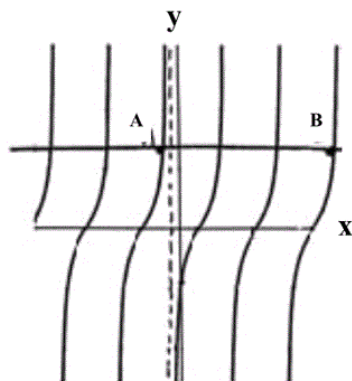
ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، مثلثات - ۶ سوال -

۱۲۳- اگر نمودار $y = b \sin \pi(\alpha x - 1) - 1$ به صورت مقابل باشد، حاصل $\frac{\alpha}{b}$ برابر کدام می تواند باشد؟



- (۱) $-\frac{3}{8}$
- (۲) $-\frac{1}{4}$
- (۳) $-\frac{5}{16}$
- (۴) $-\frac{7}{6}$

آزمون ۲۲ دی



۱۲۴- بخشی از نمودار $y = \tan(2x + a)$ رسم شده است. حاصل $\frac{x_B - x_A}{a}$ کدام است؟ $(\frac{-\pi}{2} < a < 0)$

- (۱) $-\frac{4}{5}$
- (۲) $\frac{4}{5}$
- (۳) -9
- (۴) ۹

آزمون ۲۲ دی

$$x = -\frac{\pi}{12}$$

۱۲۵- با فرض $\cos 53^\circ = 0/6$ ، مقدار $\cos 32^\circ$ چقدر است؟

(۱) $0/8426$

(۲) $0/8432$

(۳) $0/8562$

(۴) $0/8672$

آزمون ۲۲ دی

۱۲۶- معادله $\frac{1}{2} = \lambda \cos^2 x - \lambda \cos^4 x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

آزمون ۲۲ دی

۱۲۷- اگر $x = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$ یک دسته از جوابهای معادله $3\sin x + \cos 2x = k$ باشد، مساحت شکل حاصل از وصل کردن تمام

جوابهای این معادله بر روی دایره مثلثاتی کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۳) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

آزمون ۲۲ دی

۱۲۸- از معادله مثلثاتی $\sin 3x \times \cos 4x = 1$ تعداد جوابها در $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، حد بی نهایت و حد در بی نهایت - ۷ سوال -

۱۲۹- باقیمانده تقسیم $p(2x-1)$ بر $x+2$ برابر ۳- و باقیمانده تقسیم $p(2x+1)$ بر $x-2$ برابر ۱ می باشد. باقیمانده

تقسیم $p(x+4)-2p(-x-4)$ بر $x-1$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۷

(۳) -۵

(۴) ۵

آزمون ۲۲ دی

۱۳۳- اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^-} \frac{-\left[\frac{3x^2+1}{x^2}\right]x+a}{6-\frac{2}{x}} = +\infty$ باشد، چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

آزمون ۲۲ دی

۱۳۴- اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x}{2^x - x^2} = +\infty$ باشد، مجموع مربعات ریشه های معادله $x^4 - ax^2 + 1 = 0$ کدام است؟

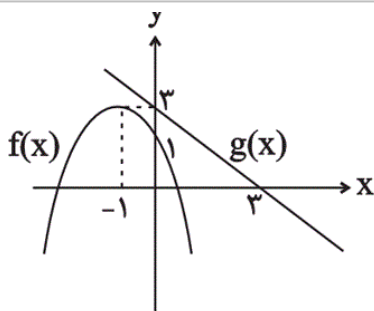
(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۸

آزمون ۲۲ دی



۱۳۵- با توجه به نمودار توابع f و g ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x|g(x)|}$ کدام است؟

(۱) ۱

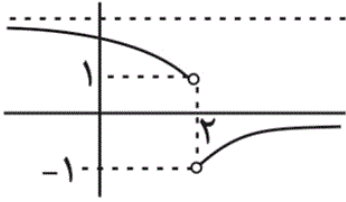
(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) -۲

آزمون ۲۲ دی

۱۳۶- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2x + 3}\right)$ چقدر است؟



۱ (۱)

-۱ (۲)

۲ (۳)

وجود ندارد. (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۳۷- اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{3|x|+2}{x+7}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ چقدر است؟

۳ (۱)

-۳ (۲)

وجود ندارد (۳)

۱ (۴)

آزمون ۲۲ دی

۱۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ کدام است؟

۲ (۱)

۱ (۲)

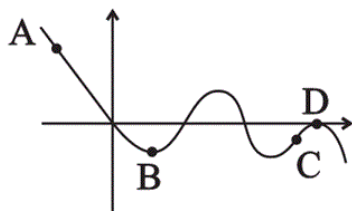
۴ (۳)

۳ (۴)

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، مشتق - ۳ سوال -

۱۳۸- با توجه به نمودار تابع $f(x)$ کدام گزینه در مورد این تابع درست نیست؟



(۱) $f'(A) < f'(B)$ ، $f(A) > f(B)$

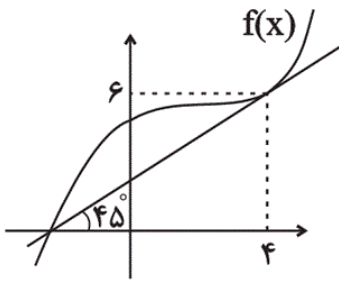
(۲) $f'(A) < f'(C)$ ، $f'(B) = f(D)$

(۳) $f'(C) < f(B)$ ، $f'(B) = f(D)$

(۴) $f'(C) \geq f'(B) \geq f(D) \geq f'(A)$

آزمون ۲۲ دی

۱۳۹- طبق نمودار خط مماس بر تابع f داده شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{1}{8}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $-\frac{1}{4}$

آزمون ۲۲ دی

۱۴۰- اگر تابع f در $x=1$ مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4$ حاصل $f'(1) + f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) -۴
- (۳) ۳
- (۴) -۳

آزمون ۲۲ دی

ریاضی دوازدهم + پایه مرتبط ، ترکیبی - سوال ۱ -

۱۳۰- اگر $f(x) = \left[\frac{2x-6}{x-2} \right] + x - 2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x)$ کدام است؟

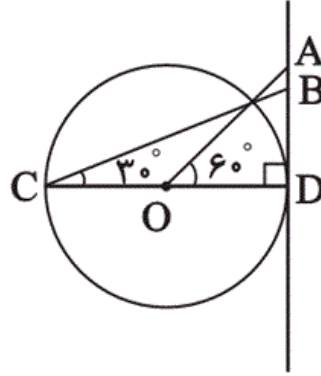
- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) صفر

آزمون ۲۲ دی

۱۲۱- گزینه «۲»

(عباس اشرفی)

طول پاره خط AD برابر $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است. اندازه زاویه C برابر 30° است. در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{2} \rightarrow BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

طول پاره خط AB برابر است با:

$$AD - BD = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(مثال ۱، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۳) (۱۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

با فرض $A = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} - \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ داریم:

$$A^2 = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{1-\sin x} - 2 \quad (A < 0 \text{ که دقت کنید که})$$

$$= \frac{(1-\sin x)^2 + (1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} - 2 = \frac{2+2\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x} + 2\tan^2 x - 2 = 2(1+\tan^2 x) + 2\tan^2 x - 2 = 4\tan^2 x$$

$$= 4(7) = 28$$

$$A = -2\sqrt{7}$$

(ترکیبی، مثلثات) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۴

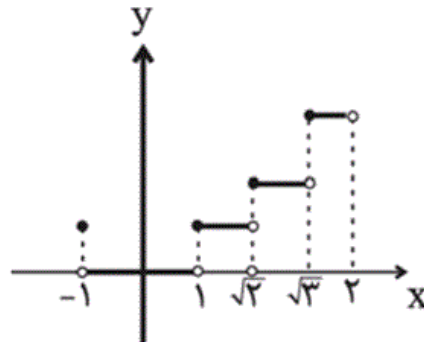
۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل نمودار تابع در نقاط به طول $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = \sqrt{2}$ و $x = \sqrt{3}$ ناپیوسته است. بنابراین اگر بخواهیم تابع در ۳ نقطه ناپیوسته باشد، بیشترین مقدار a برابر با $\sqrt{3}$ خواهد بود. در این بازه نقاط به طول $x = 1$ و $x = \sqrt{2}$ فقط از راست پیوسته هستند. بنابراین:

$$\max(a+b) = \sqrt{3} + 2 \quad \text{را به دست می‌آوریم:}$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

با توجه به ضابطه تابع f ، یک تابع اکیداً نزولی می‌باشد. بنابراین:

$$f(a) = a + 3 \rightarrow -(a+1)^3 + 2 = a + 3 \rightarrow (a+1)^3 + a + 1 = 0$$

$$\rightarrow (a+1)((a+1)^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 & \text{قابل قبول} \\ (a+1)^2 = -1 & \text{غلق} \end{cases}$$

و داریم:

$$f(1) = - \rightarrow -(1+1)^3 + 2 = b \rightarrow b = -6$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases} \rightarrow a - b = -1 - (-6) = 5$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

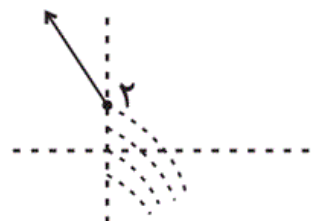
 ۱

آزمون ۲۲ دی

(داور بوالسنی)

با توجه به گزینه‌ها $g(x) = ax + b$ فرض می‌کنیم. به ازای $x \leq 0$

تابع $-x + 2$ اکیداً نزولی است. پس: $ax + b - (x+1)^2$ به ازای $x = 0$ باید کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد.



$$a(0) + b - (0+1)^2 \leq 2 \rightarrow b \leq 3$$

ثانیاً برای اینکه نمودار $(ax+b) - (x+1)^2$ اکیداً نزولی باشد طول رأس سهمی $y = -x^2 + (a-2)x + b - 1$ باید خارج بازه $(0, +\infty)$ باشد یعنی:

$$\frac{a-2}{2} \leq 0 \rightarrow a \leq 2$$

با توجه به دو شرط $a \leq 2$ و $b \leq 3$ فقط گزینه ۴ قابل قبول نمی‌باشد.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲۲ دی

۱۱۳- گزینه ۲»

(ایمان کاظمی)

ترکیب تابع اکیداً صعودی با تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است و تابع اکیداً نزولی هر چه ورودی اش کمتر باشد، مقدارش بیشتر است.

$$f \circ g(x^3) - f \circ g(4x) > 0$$

$$\rightarrow x^3 < 4x \rightarrow x^3 - 4x < 0 \rightarrow x(x^2 - 4) < 0$$

$$\rightarrow x(x-2)(x+2) < 0$$

-2	0	2
-	+	-

$$D = (-\infty, -2) \cup (0, 2)$$

در اعداد صحیح منفی، ۱- و ۲- جزء دامنه نیستند.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

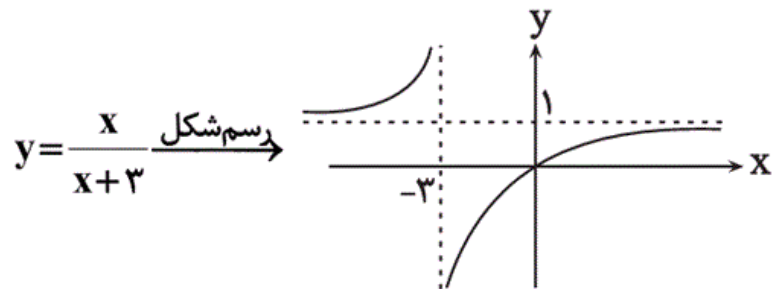
۱۱۴- گزینه ۳»

(بهزار مهرمی)

طبق تعریف داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [3, 6) \mid \frac{x}{x+3} \in [-2, 3]\}$$



$$x=3 \rightarrow y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x=6 \rightarrow y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow R_f = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

پس، به ازای تمامی اعداد دامنه، عبارت $\frac{x}{x+3}$ در بازه $[-2, 3]$ قرار می‌گیرد.

$$D_{g \circ f} = [3, 6) \rightarrow \text{شامل سه عدد صحیح است} = \{3, 4, 5\}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

$$\left. \begin{array}{l} -5 \\ 3 \end{array} \right\} \in y \rightarrow 3 = -2f(\lambda) + 4 \rightarrow f(\lambda) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \in y \rightarrow b = 3f\left(\frac{1}{2}a - 3\right) - 1 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}a - 3\right) = \frac{b+1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a - 3 = \lambda \Rightarrow a = 22$$

$$\rightarrow \frac{b+1}{3} = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + 2b = 22 + 1 = 23$$

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

ابتدا ضابطۀ $y = f \circ f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f \circ f(x) = \begin{cases} (-x-2)^2 + 1, & x \geq 0 \\ -x^2 - 3, & x < 0 \end{cases}$$

حال نقاط تلاقی $f \circ f(x)$ و $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$x \geq 0: (-x-2)^2 + 1 = -x^2 + 1 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \quad \checkmark \\ x=-3 \quad \times \end{cases}$$

$$x < 0: -x^2 - 3 = -x - 4 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \times \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

مجموعۀ جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0) \cup (1, +\infty)$

$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, b = 0, c = 1 \rightarrow 2a + b - c = 1 - \sqrt{5} + 0 - 1 = -\sqrt{5}$$

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۸ تا ۹۳) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

۱۱۷- گزینۀ «۴»

(رضا سیدنیفی)

با توجه به اینکه تابع f ، اکیداً صعودی می‌باشد بنابراین وارون خود را بر روی نیمساز ناحیۀ اول قطع خواهد کرد، بنابراین داریم:

$$f(x) = x \rightarrow \sqrt{2x+m} = x \xrightarrow{x=1} \sqrt{2+m} = 1 \rightarrow m = -1$$

در نتیجه: $f(x) = \sqrt{2x-1}$ آن‌گاه برای محاسبۀ $f^{-1}(3)$ داریم:

$$\sqrt{2x-1} = 3 \rightarrow 2x-1 = 9 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

پس در نتیجه خواهیم داشت $f^{-1}(3) = 5$ می‌باشد.

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

می‌دانیم که $g(f^{-1}(a))=3$ می‌باشد، پس:

$$\frac{x+3}{x-1}=3 \rightarrow 3x-3=x+3 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

در نتیجه $f^{-1}(a)=3$ می‌باشد. بنابراین $f(3)=a$ ، آن‌گاه با جایگذاری در

$$f(3)=2-3=-1$$

ضابطه داریم:

در نتیجه $a=-1$ می‌باشد.

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

می‌دانیم اگر $f(\alpha)=\beta$ باشد در نتیجه $\alpha=f^{-1}(\beta)$ می‌شود. در نتیجه از

$$f^{-1}(x)=x-1$$

طرفین معادله زیر f می‌گیریم:

$$x=f(x-1)$$

حالا با جایگذاری $x-1$ در تابع داده‌شده و حل معادله خواهیم داشت:

$$x=f(x-1) \rightarrow x=2(x-1)^2-(x-1)-23$$

$$2x^2-6x-20=0 \rightarrow (2x-10)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \rightarrow 5 \rightarrow y=x-1=4 \rightarrow A(5,4)$$

$$OA=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$$

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

$$f \circ g(x) = g(x) \xrightarrow{\text{از طرفین } f^{-1} \text{ می‌گیریم}} f^{-1}(f(g(x)))$$

$$= f^{-1}(g(x)) \Rightarrow g(x) = f^{-1}(g(x))$$

$$ax + 2 = \frac{2x + 2}{x - 3} \rightarrow ax^2 - 3ax + 2x - 6 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow ax^2 - 3ax - 8 = 0$$

شرط اینکه معادله اخیر یک جواب داشته باشد این است که $\Delta = 0$. پس:

$$9a^2 - 4a(-8) = 0$$

$$9a^2 + 32a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = \frac{-32}{9}$$

دقت کنید که به ازای $a = 0$ به معادله $-8 = 0$ می‌رسیم که ممکن نیست.

(ترکیبی، تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ و ۲۲ تا ۲۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$y = b \sin(\alpha\pi x - \pi) - 1 = -b \sin(\alpha\pi x) - 1$$

با توجه به آن که تابع حول $x = 0$ صعودی است، پس:

$$(-b) \times \alpha > 0 \rightarrow \alpha b < 0$$

حداقل تابع برابر با -3 است، بنابراین:

$$-|b| - 1 = -3 \rightarrow |b| = 2$$

می‌توانیم فرض کنیم b منفی و α مثبت است. پس $b = -2$ و صورت تابع به شکل زیر می‌شود:

$$y = 2 \sin(\alpha\pi x) - 1$$

می‌دانیم که تابع \sin در $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ حداکثر می‌شود. نمودار داده شده در $x = 4$

برای دومین بار حداکثر می‌شود. پس:

$$\alpha\pi \times 4 = 2\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{\frac{5}{8}}{-2} = \frac{-5}{16}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۲۴- گزینه ۱»

(سروش موثینی)

دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است.دقت کنید که اختلاف x_B و x_A به اندازه ۳ دوره تناوب یعنی $\frac{3\pi}{2}$ است:

$$\Rightarrow x_B - x_A = \frac{3\pi}{2}$$

از طرفی با توجه به $x = \frac{-\pi}{12}$ و اولین جایی در منفی‌ها که به $-\infty$ میل

کرده‌است، داریم:

$$2\left(-\frac{\pi}{12}\right) + a = \frac{-\pi}{2} \rightarrow a = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{x_B - x_A}{a} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{-\frac{\pi}{3}} = -4/5$$

و در نتیجه داریم:

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۲۵- گزینه ۲»

(سروش موثینی)

$$\cos 53^\circ = 0/6$$

$$\cos 106^\circ = 2\cos^2 53^\circ - 1 = 2 \times 0/6^2 - 1 = 2 \times 0/36 - 1 = -0/28$$

$$\sin 16^\circ = 0/28$$

پس داریم:

$$\Rightarrow \cos 32^\circ = 1 - 2\sin^2 16^\circ$$

$$= 1 - 2(0/28)^2$$

$$= 1 - 2 \times 0/0784$$

$$= 1 - 0/1568$$

$$= 0/8432$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\lambda \cos^2 x (\cos^2 x - 1) + 1 = -\lambda \sin^2 x \cos^2 x + 1 = -2 \sin^2 x \cos^2 x + 1 = \cos^2 2x$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

این معادله روی بازه $[0, 2\pi]$ هشت ریشه دارد.

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۸)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

عبارت $x = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$ معادل $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است. با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ در

معادله داده شده، مقدار k به دست می آوریم:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = k \Rightarrow k = 2$$

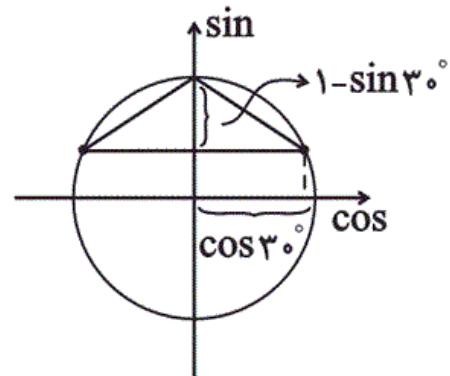
حال با استفاده از اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، معادله را بازنویسی می کنیم:

$$3\sin x + (1 - \sin^2 x) = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

مطابق شکل روبه رو، مساحت مثلث برابر است با:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ارتفاع}}{\text{قاعده}} = \frac{1}{2} (2\cos 30^\circ) \times (1 - \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه های ۱۴۲ تا ۱۴۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سروش موئینی)

$$\sin^3 x = -1$$

$$\sin^3 x = 1$$

$$\cos^4 x = -1$$

$$\cos^4 x = 1$$

دو حالت داریم:

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 4x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (4k-1)\frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (4k+1)\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

مشترک ندارد

$$\text{مشترک } \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

(داور بوالسنی)

$$p(2x-1) = (x+2)Q(x) - 3 \xrightarrow{x=-2} p(-5) = -3$$

$$p(2x+1) = (x-2)Q'(x) + 1 \xrightarrow{x=2} p(5) = 1$$

$$p(x+4) - 2p(-x-4) = (x-1)Q''(x) + R$$

$$\xrightarrow{x=1} p(5) - 2p(-5) = R \rightarrow 1 - 2(-3) = R \rightarrow 7 = R$$

(در بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

(مصطفی کرمی)

نمودار $\frac{3x^2+1}{x^2} = 3 + \frac{1}{x^2}$ در اطراف $\frac{1}{3}$ نزولی است، پس در $(\frac{1}{3})^-$ حد آن

۱۲ است. و $6 - \frac{2}{x}$ هم اطراف $\frac{1}{3}$ صعودی است، پس در $(\frac{1}{3})^-$ ، صفر منفی

$$\frac{-12(\frac{1}{3}) + a}{0^-} = +\infty$$

است. یعنی داریم:

$$a = 1, 2, 3$$

و در نتیجه: $a - 4 < 0$ و $a < 4$ است. پس:

(در بی نهایت و در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

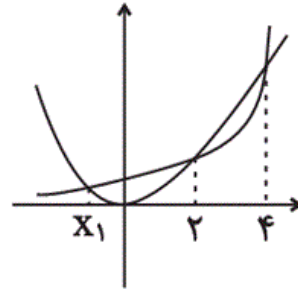
(مصطفی کرمی)

نمودار x^2 و 2^x در سه نقطه $x=4$ و $x=2$ و x_1 برخورد دارد.

با توجه به $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x}{2^x - x^2} = +\infty$ ، اگر a منفی باشد باید در a^+ داشته باشیم

$x^2 < 2^x$ که در x_1 این طور نیست و اگر a مثبت باشد در a^+ باید داشته باشیم

$x^2 > 2^x$ پس $a=4$ است. حالا داریم:



$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0 : x^2 = t$$

$$\rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

که اگر ریشه‌ها t_1 و t_2 باشند، ریشه‌های معادله اصلی $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$ است و جمع

مربعات آن‌ها برابر است با:

$$t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = 2(4) = 8$$

(مد ری‌نویس و مد در ری‌نویس) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

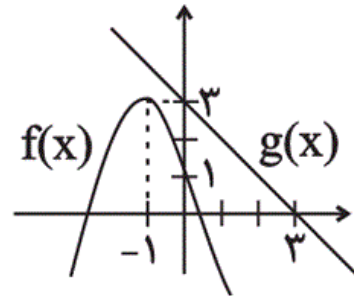
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به نمودار جمله پرتوان $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$ برابر با $-2x^2$ و معادله خط g به صورت $y = -x + 3$ است. در بی نهایت فقط جملات پرتوان صورت و مخرج مؤثر هستند، پس داریم:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{x|-x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{-x^2} = 2$$

توجه داشته باشید چون عبارت داخل قدرمطلق در $-\infty$ به صورت $(-\infty)$ است که چون داخل قدرمطلق منفی در منفی، مثبت می شود خود عبارت یعنی $-x$ از

$$|u| = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ -u, & u < 0 \end{cases} \quad \text{قدرمطلق خارج می شود:}$$

(مر بی نهایت و مر در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

(مهمرسن سلامی حسینی)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2x + 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2x^2 + 4x + 6 + x - 7}{x^2 + 2x + 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(2 + \frac{x - 7}{x^2 + 2x + 3} \right) = f(2 + 0^-) = f(2^-) = 1 \end{aligned}$$

(مر بی نهایت و مر در بی نهایت) (ریاضی ۳، صفحه های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲۲ دی

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3|x|+2}{x+7}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+2}{x+7} = -3$$

(مد در بی‌نهایت و مد در بی‌نهایت) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲۲ دی

(ویدون آبادی)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x}-1} = 2 \times 2 = 4$$

(ترکیبی، مد در بی‌نهایت و مد در بی‌نهایت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

(۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

(سوند ولی‌زاده)

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} f'(A) < \circ & f(A) > \circ \\ f'(B) = \circ & f(B) < \circ \\ f'(C) > \circ & f(C) < \circ \\ f'(D) = f(D) = \circ \end{cases}$$

در گزینه ۳ $f'(C) < f(B)$ نادرست است. بقیه درست‌اند.

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی

زاویه خط با جهت مثبت محور Xها برابر 45° است. سپس:

$$m = \tan 45^\circ = 1 \rightarrow f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

خط مماس از نقطه $(4, 6)$ عبور می کند. پس:

$$f(4) = 6$$

حال:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{(x-4)} \times \frac{1}{x+4} = \frac{f'(4)}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

(ترکیبی، مشتق) (ریاضی ۱، صفحه ۱۳۰) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

(علی غریبی)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

طبق تعریف مشتق:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f'(1) + f(1) = 4 + 0 = 4$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

 آزمون ۲۲ دی

ابتدا مقدار تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x-6}{x-2} \right] + x - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x-4}{x-2} - \frac{2}{x-2} \right] + x - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 - \frac{2}{x-2} \right] + x - 2 = [2 + 1^+] + 0^+ - 2 = 1^+\end{aligned}$$

سپس با جایگذاری دوباره مقدار به دست آمده در تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2x-6}{x-2} \right] + x - 2 = [4^+] + 1^+ - 2 = 3^+$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} fof(x) \right] = [3^+] = 3$$

در نتیجه:

(ترکیبی، تابع و حد) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۶) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲۲ دی