

ریاضی و آمار یازدهم ، توابع پلکانی و قدر مطلق - ۱۰ سوال - دبیر ناصر قراچی

$$۱- اگر \quad f(x) = \begin{cases} \text{sign}(x^2 - 5x + 4)x^3 + 13 & ; x \in \{a, b\} \\ a^2 + b^2 & ; x \notin \{a, b\} \end{cases}$$

یک تابع پلکانی تعریف شده روی

مجموعه اعداد حقیقی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $f(2b - 4a)$ کدام است؟ ($\text{sign}(x)$ تابع علامت است.)

۳۰ (۴)

۲۶ (۳)

۱۷ (۲)

۱۳ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۲- مساحت سطح محصور بین نمودار تابع همانی و نمودار تابع $g(x) = \text{sign}(x)$ و محور y ها کدام است؟ ($\text{sign}(x)$ تابع علامت

است.)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۳- مقدار عددی عبارت $A = [-\frac{15}{4}] + [-\frac{14}{4}] + [-\frac{13}{4}] + \dots + [-\frac{1}{4}]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

-۳۴ (۴)

-۳۶ (۳)

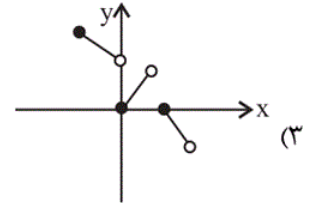
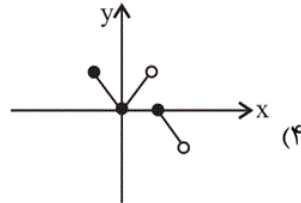
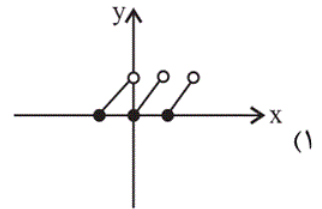
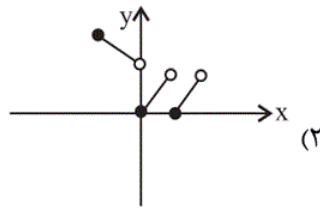
-۳۸ (۲)

-۴۰ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۴- نمودار تابع $f(x) = |x| - [x]$ با دامنه $-1 \leq x < 2$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۵- مساحت ناحیه محدود بین نمودار تابع $y = 1 - [x]$ و محور x ها در فاصله $-2 \leq x < 0$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۶- اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \text{sign}(-|x^2 + 1|) + \text{sign}(x - [x])$ برابر \mathbb{R} باشد، مجموعه اعضای برد تابع f کدام

است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$\{0, 1\}$ (۴)

$\{0, -1\}$ (۳)

$\{-1\}$ (۲)

$\{0\}$ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۷- حاصل عبارت $|\sqrt{2} - \sqrt{10}| - \sqrt{2} |2 - \sqrt{5}|$ کدام است؟

$2\sqrt{10} - \sqrt{2}$ (۴)

$-\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$-2\sqrt{10} + \sqrt{2}$ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۸- با فرض $x < -1$ حاصل عبارت $A = \frac{1}{4} |-4x - 4| - |5x - 3|$ همواره کدام است؟

$-3x + 5$ (۴)

$7x - 1$ (۳)

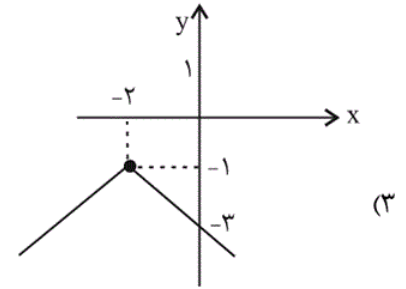
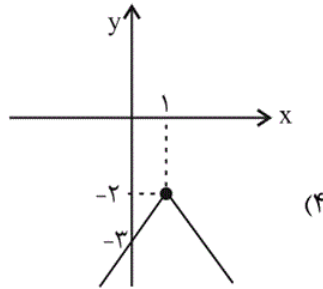
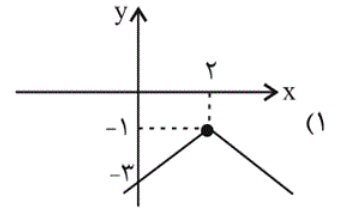
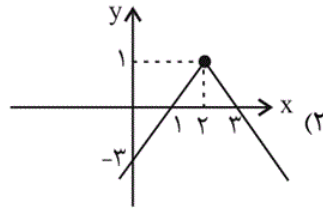
$-7x + 1$ (۲)

$3x - 5$ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۹- نمودار تابع $f(x) = -|x-2|-1$ به کدام صورت است؟



دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۱۰- تابع $f(x) = |x-2| + 2x$ را به صورت $f(x) = \begin{cases} 3x+a & ; x \geq c \\ x+b & ; x < c \end{cases}$ نوشته‌ایم. مساحت مثلث حاصل از برخورد نمودار تابع

$y = abx + c$ با محورهای مختصات کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

دبیر : ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۱- گزینه «۴»

(مهم، ضا، اسخ)

برای اینکه تابع f تابعی پلکانی باشد، باید در هر ضابطه فقط عددی ثابت داشته باشیم، بنابراین:

$$\text{sign}(x^2 - 5x + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=1 \end{cases}$$

در نتیجه $a=4$ و $b=1$ یا برعکس و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 13 & ; x \in \{1, 4\} \\ 17 & ; x \notin \{1, 4\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2b-4a) = f(2-16) = f(-14) = 17 \\ f(2b-4a) = f(8-4) = f(4) = 13 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای $f(2b-4a)$ برابر ۳۰ است.

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۴ تا ۳۶)

۴

۳

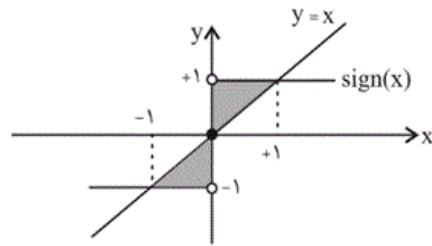
۲

۱

۲- گزینه «۲»

(فرشید کریمی)

از نظر هندسی، نمودار تابع همانی همان نیمساز ناحیه اول و سوم محورهای مختصات می‌باشد. نمودار تابع همانی و تابع علامت را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



چون نمودار تابع همانی، نیمساز ناحیه اول و سوم می‌باشد، بنابراین محل برخورد آن با نمودار تابع علامت نقطه‌هایی با طول و عرض مساوی‌اند، مطابق با شکل داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = 1$$

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۵ و ۳۶)

۴

۳

۲

۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

۳- گزینه «۳»

(علی آزار)

$$A = \underbrace{\left[-\frac{15}{4}\right] + \left[-\frac{14}{4}\right] + \left[-\frac{13}{4}\right]}_{3 \times (-4)} + \underbrace{\left[-\frac{12}{4}\right] + \dots + \left[-\frac{9}{4}\right]}_{4 \times (-3)} + \underbrace{\left[-\frac{8}{4}\right] + \dots + \left[-\frac{5}{4}\right]}_{4 \times (-2)}$$

$$+ \underbrace{\left[-\frac{4}{4}\right] + \dots + \left[-\frac{1}{4}\right]}_{4 \times (-1)} = (-4 \times 3) + (-3 \times 4) + (-2 \times 4) + (-1 \times 4)$$

$$= -12 - 12 - 8 - 4 = -36$$

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۷ تا ۳۹)

۴

۳

۲

۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -x - (-1) = 1 - x$$

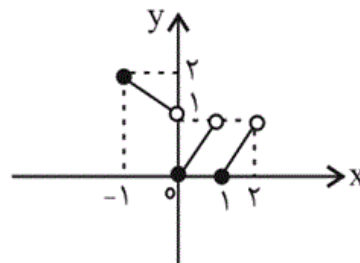
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x - 0 = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & ; -1 \leq x < 0 \\ x & ; 0 \leq x < 1 \\ x-1 & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

حال هر ضابطه را در محدوده خودش رسم می‌کنیم:



(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۷ تا ۴۴)

۴

۳

۲ ✓

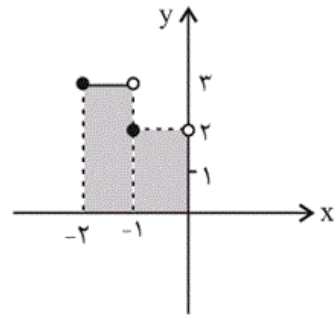
۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

ابتدا نمودار تابع $y = 1 - [x]$ را در فاصله $-2 \leq x < 0$ رسم می‌کنیم:

$$y = 1 - [x] = \begin{cases} 1 - (-2) & ; -2 \leq x < -1 \\ 1 - (-1) & ; -1 \leq x < 0 \end{cases}$$



حال مساحت قسمت هاشورخورده را پیدا می‌کنیم:

$$S = (3 \times 1) + (2 \times 1) = 3 + 2 = 5$$

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۷ تا ۳۹)

۴

۳

۲

۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

چون $x^2 + 1$ همواره مثبت است و می‌دانیم که خروجی قدر مطلق همواره عددی مثبت است؛ بنابراین:

$$\text{sign}(-|x^2 + 1|) = -1$$

همچنین می‌دانیم اگر x عددی غیر صحیح باشد، $x - [x]$ همواره عددی بین صفر و ۱ است و اگر x عددی صحیح باشد، $x - [x] = 0$ است بنابراین:

$$\text{sign}(x - [x]) = \begin{cases} 1 & ; x \notin Z \\ 0 & ; x \in Z \end{cases}$$

بنابراین ضابطه تابع f را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin Z \\ -1 & ; x \in Z \end{cases}$$

بنابراین مجموعه اعضای برد تابع f به صورت $R_f = \{-1, 0\}$ است.

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

با توجه به مثبت یا منفی بودن عبارت داخل قدر مطلق، قدر مطلق‌ها را

برمی‌داریم؛

اگر داخل قدر مطلق مثبت باشد، خود عبارت را بدون قدر مطلق می‌نویسیم اما

اگر داخل قدر مطلق منفی باشد برای این که قدر مطلق را برداریم باید قرینه

عبارت را بنویسیم:

$$|\sqrt{2}-\sqrt{10}| = -\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$|\sqrt{2}-\sqrt{5}| \Rightarrow -\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |-\sqrt{2} + \sqrt{10}| - \sqrt{2} - |\sqrt{2} - \sqrt{5}| = (\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{5} - 2)$$

$$= \sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{10} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۳۰ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ضابطه تابع قدر مطلق $f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ است.

محدوده عبارت‌های داخل قدر مطلق را با توجه به $x < -1$ مشخص می‌کنیم:

$$-4x - 4 \xrightarrow{x < -1} -4x - 4 > 0$$

$$5x - 3 \xrightarrow{x < -1} 5x - 3 < 0$$

در نتیجه داریم:

$$A = \frac{1}{2} |-4x - 4| - |5x - 3| = \frac{1}{2} (-4x - 4) - (-(5x - 3))$$

$$= \frac{-4x}{2} - \frac{4}{2} + 5x - 3 = -2x - 2 + 5x - 3 = 3x - 5$$

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۴۰ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

(علی قورمان زاده)

۹- گزینه «۱»

باید نمودار تابع $y = -|x|$ را ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد به سمت پایین

انتقال دهیم پس جواب گزینه «۱» است.

(توابع پلکانی و قدر مطلق، صفحه ۴۰ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

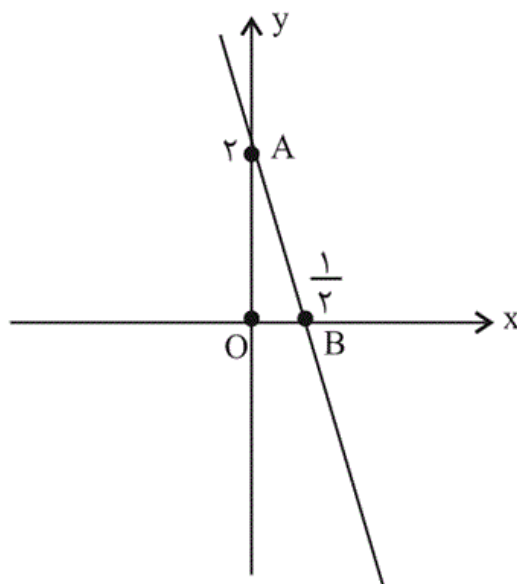
دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند

$$f(x) = |x-2| + 2x \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-2 & ; x \geq 2 \\ x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$

بنابراین $a = -2$ و $b = 2$ و $c = 2$ است.

حال نمودار تابع $y = -4x + 2$ را رسم می‌کنیم:



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \left(2 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

(توابع پلکانی و قدرمطلق، صفحه ۴۰ تا ۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

دبیر: ناصر قراچی

آزمون ۱۸ اسفند