سوالات کانون فرهنگی آموزش قلم چی ویژه دبیران آزمون ۱۴۰۲۱۲۱۸

ریاضي دوازدهم + پایه مرتبط ، **مشتق** - ۱۰ سوال - دبیر ناصر قراچی

۱۴۱- اگر خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول k واقع بر آن، عمود بر خط به معادلهٔ $\frac{2x+1}{4}+\frac{y-1}{3}=-1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(k+4h)-f(k)}{3h}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$

۲) $\frac{8}{9}$

۳) $\frac{4}{9}$

۴) $\frac{4}{3}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x+6)^2} & , x\ge 2\\ ax^2+bx & , x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است، حاصل ab کدام است؟

۱) $\frac{55}{18}$

۲) $-\frac{55}{9}$

۳) $\frac{55}{9}$

۴) $-\frac{55}{18}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۳- در تابع $f(x)=|x^2-(m-1)x+m|$، برای مقدار m، بزرگ‌ترین عدد طبیعی را در نظر می‌گیریم که به ازای آن تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۲-

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۴- تابع $f(x)=(2x^3+2ax^2+bx+2c)[x]$، در نقطه‌ای به طول $x=1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد و در $x=-2$ مشتق‌پذیر می‌باشد. مقدار $a-b-c$ کدام است؟ ($[\ ]$: نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱-

۲) ۷

۳) ۶

۴) ۲-

۱۴۵- اگر $f(x)=\left[\frac{-6}{x}\right]\sqrt[5]{16x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟ ([ ] : نماد جزء صحیح است.)

۱) $-0/3$

۲) $0/6$

۳) $-0/6$

۴) $0/3$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۶- تابع $f(x)=\sqrt[5]{(a-x^2)^2}$ در نقطه‌ای به طول ۶، نیم‌مماس قائم دارد. خط مماس بر نمودار این تابع در $x=2$، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $2/2$

۲) $-4/4$

۳) $4/4$

۴) $-2/2$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۷- اگر $f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ باشد، مقدار مشتق عبارت $\frac{f(x)}{f'(x)}$ در نقطهٔ $x=3$ کدام است؟

۱) 5

۲) 1

۳) $\frac{5}{2}$

۴) -1

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۸- اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=(\frac{2x-1}{x+3})^2$ باشند، مقدار $g'(\frac{1}{3})f'(g(\frac{1}{3}))$ کدام است؟

۱) -21

۲) -63

۳) 21

۴) 63

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۹- تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر بوده و به ازای هر x از دامنه، $f(x+6)=f(x)$ و نیز $f(|x|)=f(x)$ و همینطور $f'(8)=-10$ می‌باشد. اگر $g(2x+1)=f(\frac{2x-6}{x-1})$ باشد، حاصل $g'(5)$ چقدر است؟

۱) -10

۲) 10

۳) 20

۴) -20

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۰- متحرکی روی مسیر $f(x)=x+\sqrt{x}$ در حال حرکت است. آهنگ متوسط تغییر تابع در $[۱,h]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در $x=۴$ برابر است. مقدار h کدام است؟

۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۶

۴) ۲۵

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

ریاضي دوازدهم + پایه مرتبط ، کاربرد مشتق - ۱۰ سوال - دبیر ناصر قراچی

۱۵۱- تابع $f(x)=\dfrac{mx-۲}{۳x-(m+۱)}$ به ازای کدام مقادیر m، در بازه $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است؟

۱) $(-۳,۲)$

۲) $(-۱,۲)$

۳) $(-۲,۱)$

۴) $(-۳,-۱)$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۲- تابع $f(x)=\begin{cases} mx-[mx] & ;[mx]=۲k \\ mx-[mx]-۱ & ;[mx]=۲k+۱ \end{cases}$ روی بازهٔ $(۰,۸)$، دارای ۱۵ نقطه بحرانی است. اگر $k\in Z$ باشد، آن‌گاه مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳/۴

۲) ۳/۶

۳) ۳/۸

۴) ۴/۱

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۳- مجموعه طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^۲-۹|$ کدام است؟

۱) $\{۳,\sqrt{۳}\}$

۲) $\{-\sqrt{۳},\sqrt{۳}\}$

۳) $\{-۳,\sqrt{۳}\}$

۴) $\{-۳,۳\}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۴- اگر $A(۳,-\frac{۲۵}{۳})$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x)=ax^۳-x^۲-۳x+b$ باشد، مختصات ماکزیمم نسبی $f(x)$ کدام است؟

۱) $B(-۱,-\frac{۷}{۳})$

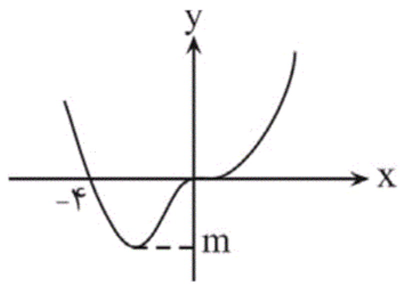
۲) $B(-۱,\frac{۷}{۳})$

۳) $B(۱,\frac{۷}{۳})$

۴) $B(-\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۵- در شکل زیر که نمودار تابع $f(x)=x^۴+۲ax^۳+bx$ است، حاصل $\frac{a+b+۱}{m}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲۷}$

۲) $\frac{۱}{۲۷}$

۳) $\frac{۱}{۹}$

۴) $-\frac{۱}{۹}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۶- اگر $\{۲,-\frac{۱}{۲}\}$ مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)=ax^۳-bx^۲-۲x+۱$ باشد، مقدار مینیمم مطلق این تابع در بازه $[۰,۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۰}{۳}$

۲) $-\frac{۱۱}{۳}$

۳) $-\frac{۱۳}{۳}$

۴) $-\frac{۱۴}{۳}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۷- تابع با ضابطه $f(x)=kx+\sqrt{-۲x^۲-۳x+۵}$ در نقطه به طول $\frac{۱}{۲}$، دارای اکسترمم نسبی است. اگر برد این تابع بصورت $[a,b]$ باشد، مقدار $(a+b)^۲$ کدام است؟

۱) ۴

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۹

۴) $\frac{۹}{۴}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۸- کمترین فاصله نقاط منحنی $y=\sqrt{x+۲}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$

۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{۷}}$

۴) $۲\sqrt{۷}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول وتر k، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شوند تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین مقدار باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۶۰- مستطیل‌هایی چنان رسم می‌کنیم که دو رأس آن بر روی نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۱-x^۲ & , x<۰ \\ ۱-x & , x\geq ۰ \end{cases}$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور طول‌ها قرار داشته باشند. حداکثر مساحت این مستطیل‌ها در کدام طول منفی ایجاد می‌شود؟

۱) $-\frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۱۶}$

۲) $-\frac{\sqrt{۱۷}-۱}{۸}$

۳) $-\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}$

۴) $-\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۱۶}$

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۱- گزینهٔ «۲» (محمد ابراهیم توزنده جانی)

ابتدا شیب خط به معادلهٔ $\frac{y-1}{3}+\frac{2x+1}{4}=-1$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{y}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}=-1 \Rightarrow \frac{y}{3}+\frac{x}{2}=-\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow \text{شیب}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

از آنجا که خط مماس بر منحنی f در $x=k$ عمود بر خط بالا می‌باشد، پس شیب آن قرینه و معکوس شده و برابر $\frac{2}{3}$ خواهد بود، به عبارتی $f'(k)=\frac{2}{3}$ است و داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(k+4h)-f(k)}{3h}=(\frac{4-0}{3})f'(k)=\frac{4}{3}(\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶۶ تا ۷۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۲- گزینهٔ «۴» (علی غریبی)

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم $\Rightarrow f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\Rightarrow 4=4a+2b\,(1)$

مشتق چپ و راست را بررسی می‌کنیم $\Rightarrow f'_+(2)=f'_-(2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+6)}}=2ax+b$$

$$\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{3}\ (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=4\\ 4a+b=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{11}{3}\\ a=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6}\end{cases}\Rightarrow a.b=-\frac{55}{18}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۳- گزینهٔ «۴»

(سروش موئینی)

داخل قدرمطلق ریشه ساده ندارد پس دلتای آن نامثبت است

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = m^۲ - ۲m + ۱ - ۴m \le ۰ \Rightarrow m^۲ - ۶m + ۱ \le ۰$$

$$۳ - \sqrt{۸} \le m \le ۳ + \sqrt{۸} \xrightarrow[m \in \mathbb{N}]{} \max(m) = ۵$$

پس $f(x) = x^۲ - ۴x + ۵$ و حاصل حد برابر است با:

$$-f'(۳) = -(۲ \times ۳ - ۴) = -۲$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۴- گزینهٔ «۲»

(داوود بوالحسنی)

با توجه به اینکه $x = ۱$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع f می‌باشد پس تابع در $x = ۱$ پیوسته است ولی مشتق چپ و راست نابرابر دارد پس باید عبارت $۲x^۳ + ۲ax^۲ + bx + ۲c$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد همچنین با توجه به اینکه تابع در $x = -۲$ مشتق‌پذیر است باید عبارت $۲x^۳ + ۲ax^۲ + bx + ۲c$ بر $(x + ۲)^۲$ بخش‌پذیر باشد (چرا؟)

$$۲x^۳ + ۲ax^۲ + bx + ۲c = ۲(x - ۱)(x + ۲)^۲$$
$$= (۲x - ۲)(x^۲ + ۴x + ۴) = ۲x^۳ + ۶x^۲ - ۸$$

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ b = ۰ \\ ۲c = -۸ \Rightarrow c = -۴ \end{cases}$$

$$a - b - c = ۳ - ۰ + ۴ = ۷$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۵- گزینهٔ «۳»

(محی الدین خرم شاهی)

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'_+(2)$$

$$\left[\frac{-6}{2^+}\right]=\left[(-3)^+\right]=-3\xrightarrow{x\to 2^+}f(x)=-3\sqrt[5]{16x}$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$f'(x)=-3\times\frac{16}{5\sqrt[5]{(16x)^4}}\Rightarrow f'_+(2)=-3\times\frac{16}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=-3\times\frac{16}{5\times 16}$$

$$\Rightarrow f'_+(2)=\frac{-3}{5}=-0/6$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۶- گزینهٔ «۳»

(دانیال ابراهیمی)

ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{-4x}{5\sqrt[5]{(a-x^2)^3}}$$

با توجه به اینکه تابع در $x=6$ نیم‌مماس قائم دارد، $x=6$ باید ریشه مخرج باشد:

$$\xrightarrow{x=6}a-(6)^2=0\Rightarrow a=36$$

حال مقدار مشتق تابع در $x=2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(2)=\frac{-4(2)}{5\sqrt[5]{(36-4)^3}}=\frac{-8}{5\times 8}=\frac{-1}{5}$$

از طرفی $f(2)=4$، با داشتن شیب خط مماس و یک نقطه از آن، معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-4=\frac{-1}{5}(x-2)\Rightarrow y=\frac{-1}{5}x+\frac{22}{5}\xrightarrow{x=0}y=\frac{22}{5}=4/4$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۴۷- گزینهٔ «۳»

(علی سرآبادانی)

$$f(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\times\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{x(1+\sqrt{x+1})}{1-x-1}$$

$$=-1-\sqrt{x+1}\Rightarrow f(3)=-3(I)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x+1}}\xrightarrow{x=3}f'(3)=\frac{-1}{4}(II)$$

$$f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}\xrightarrow{x=3}f''(3)=\frac{1}{32}(III)$$

$$(\frac{f(x)}{f'(x)})'=\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\xrightarrow[(III)]{(I),(II)}$$

$$(\frac{f(3)}{f'(3)})'=\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{4})-(-3)(\frac{1}{32})}{(\frac{-1}{4})^2}=\frac{\frac{1}{16}+\frac{3}{32}}{\frac{1}{16}}=\frac{5}{2}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۸- گزینهٔ «۴»

(حمید علیزاده)

$$(fog)'(\frac{1}{3})=?$$

$$f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{(\frac{2x-1}{x+3})^2}}=\frac{1}{|\frac{2x-1}{x+3}|}=|\frac{x+3}{2x-1}|$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{3}}f(g(x))=\frac{-x-3}{2x-1}$$

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g'(x))\Rightarrow(f(g(x)))'=\frac{7}{(2x-1)^2}\xrightarrow{x=\frac{1}{3}}$$

$$(fog)'(\frac{1}{3})=\frac{7}{(\frac{2}{3}-1)^2}=\frac{7}{(-\frac{1}{3})^2}=\frac{7}{\frac{1}{9}}=63$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۴۹- گزینهٔ «۳» (محمد حسن سلامی حسینی)

با توجه به اطلاعات داده شده تابع $f(x)$ یک تابع با تناوب $T=۶$ است و نیز چون برای هر x دامنه $f(|x|)=f(x)$، پس محور y محور تقارن تابع است. حال داریم:

$$g(۲x+۱)=f(\frac{۲x-۶}{x-۱}) \Rightarrow ۲g'(۲x+۱)=\frac{۴}{(x-۱)^۲}f'(\frac{۲x-۶}{x-۱})$$

$$\xrightarrow{x=۲} ۲g'(۵)=۴f'(-۲) \quad (۱)$$

چون تابع f نسبت به محور y متقارن است پس داریم:

$$f(-x)=f(x) \Rightarrow -f'(-x)=f'(x) \quad (۲)$$

پس با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$g'(۵)=-۲f'(۲)$$

و چون تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=۶$ است پس f' نیز متناوب بوده و $T=۶$ دورهٔ تناوب $f'(x)$ نیز می‌باشد پس:

$$g'(۵)=-۲f'(۲)=-۲f'(۸)=(-۲)(-۱۰)=۲۰$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۸۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۰- گزینهٔ «۲» (محسن اسماعیل‌پور)

$$f'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴)=\frac{۵}{۴}$$

$$\text{طبق فرض} = \frac{f(h)-f(۱)}{h-۱}=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{h+\sqrt{h}-۲}{h-۱}=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴h+۴\sqrt{h}-۸=۵h-۵ \Rightarrow ۴\sqrt{h}=h+۳$$

$$\Rightarrow ۱۶h=h^۲+۶h+۹$$

$$\Rightarrow h^۲-۱۰h+۹=۰ \Rightarrow \begin{cases} h=۹ & \text{ق‌ق} \\ h=۱ & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۳ تا ۱۰۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۱- گزینهٔ «۴» (محمدعلی جلالی)

برای اینکه تابع $f(x)$ در بازه $x \in [0,+\infty)$ همواره اکیداً صعودی باشد باید مقدار مشتق آن در این بازه همواره مثبت باشد.

یادآوری: برای تابع هموگرافیک داریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\frac{mx-2}{3x-(m+1)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-m(m+1)+6}{\underbrace{(3x-(m+1))^2}_{\text{همواره مثبت}}}$$

$$=\frac{-m^2-m+6}{(3x-(m+1))^2}=\frac{-(m+3)(m-2)}{(3x-(m+1))^2}$$

پس داریم:

m		-3		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow -3<m<2 \quad (\mathrm{I})$$

از طرفی برای اینکه تابع f در بازه $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد باید ریشه مخرج $(x=\frac{m+1}{3})$ کوچکتر از صفر باشد پس داریم:

$$\frac{m+1}{3}<0 \Rightarrow m<-1 \quad (\mathrm{II})$$

از اشتراک دو بازه (I) و (II) داریم:

$$-3<m<-1$$

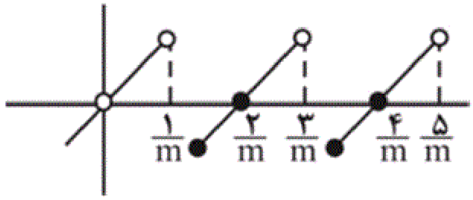
(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۲- گزینهٔ «۳» (محمد حسن سلامی حسینی)

نمودار این تابع به صورت زیر است، لذا نقاط بحرانی این تابع در مضارب فرد $\frac{1}{m}$ اتفاق می‌افتد. لذا پانزدهمین نقطه بحرانی در $x=\frac{29}{m}$ اتفاق می‌افتد پس باید $x=\frac{29}{m}$ کمتر از ۸ و شانزدهمین نقطه بحرانی یعنی $x=\frac{31}{m}$ بزرگتر یا مساوی ۸ باشد.



$$\frac{29}{m}<8 \Rightarrow \frac{29-8m}{m}<0 \Rightarrow m<0 \text{ یا } m>\frac{29}{8} \quad (1)$$

$$\frac{31}{m}\geq 8 \Rightarrow \frac{31-8m}{m}\geq 0 \Rightarrow 0<m\leq \frac{31}{8} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{29}{8}<m\leq \frac{31}{8} \Rightarrow 3/625<m\leq 3/875$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۳- گزینهٔ «۳»
(لیلا مرادی)

ابتدا $|x^{۲}-۹|$ را تعیین علامت می کنیم:

$$x^{۲}-۹=۰ \Rightarrow x=\pm ۳$$

x		-۳		۳	
$x^{۲}-۹$	$+$		$-$		$+$

$$|x^{۲}-۹|=\begin{cases} x^{۲}-۹ & x\ge ۳ \text{ یا } x\le -۳ \\ -x^{۲}+۹ & -۳<x<۳ \end{cases}$$

حال تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم و از آن مشتق گرفته و برای یافتن اکسترمم‌های نسبی، $f'(x)$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم و جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x|x^{۲}-۹|=\begin{cases} x^{۳}-۹x & ,x\ge ۳ \text{ یا } x\le -۳ \\ -x^{۳}+۹x & ,-۳<x<۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۹ & x>۳ \text{ یا } x<-۳ \\ \Rightarrow ۳x^{۲}-۹=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \Rightarrow \text{قابل‌قبول نیست} \\ -۳x^{۲}+۹ & -۳<x<۳ \Rightarrow -۳x^{۲}+۹=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۳		$-\sqrt{۳}$		$\sqrt{۳}$		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

طول نقاط ماکزیمم نسبی: $\{-۳,\sqrt{۳}\}$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۴- گزینهٔ «۲»
(سهیل ساسانی)

$$f(۳)=-\frac{۲۵}{۳} \Rightarrow ۲۷a-۹-۹+b=-\frac{۲۵}{۳} \Rightarrow ۲۷a+b=\frac{۲۹}{۳} (*)$$

$$f'(۳)=۰ \Rightarrow ۳ax^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow ۲۷a-۹=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{*} ۹+b=\frac{۲۹}{۳} \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+\frac{۲}{۳}$$

B نقطه ماکزیمم نسبی:

$$f'(x)=x^{۲}-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۳ \end{cases} \Rightarrow B(-۱,\frac{۷}{۳})$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۵- گزینهٔ «۴»
(سهیل ساسانی)

تابع در $x=0$ مماس افقی دارد. یعنی $f'(0)=0$:

$$f(x)=x^4+2ax^3+bx \Rightarrow f'(x)=4x^3+6ax^2+b=0$$

$$\xrightarrow{x=0} b=0$$

$$A(-4,0)\xrightarrow{\text{جاگذاری}}(-4)^4+2(-4)^3a=0 \Rightarrow a=2$$

$$f(x)=x^4+4x^3 \Rightarrow f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)=0$$

$$x=0\ ,\ x=-3$$

x		-3		0	
f'(x)	−	0	+	0	+

min

$$f(-3)=(-3)^4+4(-3)^3 \Rightarrow m=-27$$

$$\frac{a+b+1}{m}=\frac{2+0+1}{-27}=-\frac{3}{27}=-\frac{1}{9}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۲)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۵۶- گزینهٔ «۲»
(بابک سادات)

$f(x)$ درجه سوم و مشتق‌پذیر است. پس در نقاط بحرانی آن، مشتق برابر صفر است.

$$f'(x)=3ax^2-2bx-2 \Rightarrow \begin{cases} f'(\frac{-1}{2})=0 \Rightarrow 3a+4b=8 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12a-4b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a-4b=2 \\ 3a+4b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+1$$

حال مقدار تابع را در نقاط $x=0,2,3$ پیدا می‌کنیم:

$$f(2)=-\frac{11}{3}\quad,\quad f(0)=1\quad,\quad f(3)=-\frac{1}{2}$$

بنابراین مینیمم مطلق در بازهٔ $[0,3]$ برابر $-\frac{11}{3}$ می‌باشد.

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۷- گزینهٔ «۲»

(فرهاد رهبران رنجبر)

دامنه این تابع از حل نامعادلـه $-2x^2-3x+5\geq 0$ بدسـت مـی‌آیـد، پـس داریـم:

$D_f=[-\frac{5}{2},1]$ با توجه به فرض مساله باید $f'(\frac{1}{2})=0$ باشد:

$$f'(x)=k+\frac{-4x-3}{2\sqrt{-2x^2-3x+5}}\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=0$$

$$\Rightarrow k+\frac{-2-3}{2\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+5}}=0\Rightarrow k=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

حال برای یافتن برد این تابع پیوسته، کافی است فقط ماکزیمم و مینیمم مطلق آن را محاسبه کنیم. پس به سراغ یافتن نقاط بحرانی خواهیم رفت. ابتدا ریشه‌های مشتق تابع را می‌یابیم:

$$f'(x)=\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{4x+3}{2\sqrt{-2x^2-3x+5}}=0$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{3}\sqrt{-2x^2-3x+5}=12x+9$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان}2} 25\times 3(-2x^2-3x+5)=144x^2+216x+81\Rightarrow 294x^2+441x-294=0$$

با توجه به اینکه یکی از ریشه‌های این معادله را از قبل می‌دانیم $(x=\frac{1}{2})$ برای یافتن ریشه دوم کافی است از رابطه ضرب ریشه‌ها استفاده کنیم.

$$\alpha\times\beta=\frac{-294}{294}\xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\times\beta=-1\Rightarrow\beta=-2$$

ولی این ریشه در معادلهٔ $f'(x)=0$ صادق نیست.

حال مقدار f را در نقاط $x=-\frac{5}{2},\frac{1}{2},1$ بدست می‌آوریم:

$$f(-\frac{5}{2})=\frac{-25\sqrt{3}}{12}\quad f(\frac{1}{2})=\frac{17\sqrt{3}}{12}\quad f(1)=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\left[\frac{-25\sqrt{3}}{12},\frac{17\sqrt{3}}{12}\right]$ خواهد بود:

$$(a+b)^2=(\frac{-25\sqrt{3}}{12}+\frac{17\sqrt{3}}{12})^2=(\frac{-8\sqrt{3}}{12})^2=(\frac{-2\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4}{3}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۹ و ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۸- گزینهٔ «۲»

(محسن اسماعیل پور)

هر نقطه روی منحنی $y=\sqrt{x+2}$ به صورت $A(x,\sqrt{x+2})$ می‌باشد پس فاصله A تا مبدأ $|OA|=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a-4b=2 \\ 3a+4b=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+1$$

حال مقدار تابع را در نقاط $x=0,2,3$ پیدا می‌کنیم:

$$f(2)=-\frac{11}{3} \quad , \quad f(0)=1 \quad , \quad f(3)=-\frac{1}{2}$$

بنابراین مینیمم مطلق در بازهٔ $[0,3]$ برابر $-\frac{11}{3}$ می‌باشد.

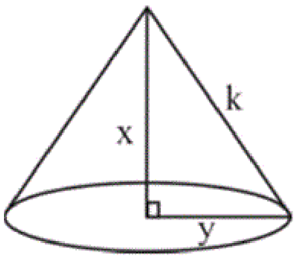
(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۵۹- گزینهٔ «۱»

(علیرضا فیضیان)



$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 x$$

از طرفی: $x^2+y^2=k^2 \Rightarrow y^2=k^2-x^2$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(k^2-x^2)x=\frac{\pi}{3}(k^2x-x^3)$$

$$V'=0 \Rightarrow V'=\frac{\pi}{3}(k^2-3x^2)=0 \Rightarrow k^2-3x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{k^2}{3} \Rightarrow x=\frac{k}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

از طرفی: $y^2=k^2-x^2 \Rightarrow y^2=k^2-\frac{k^2}{3}=\frac{2k^2}{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{3}}$

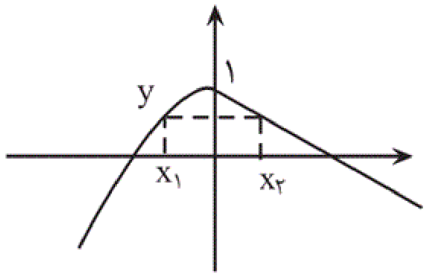
$$(1),(2) \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۱۸ اسفند | دبیر : ناصر قراچی

۱۶۰– گزینهٔ «۳» (عباس اشرفی)



مساحت مستطیل $S=(x_2-x_1)y$ است. مقادیر x_1 و x_2 را بر حسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y=1-x_2 \Rightarrow x_2=1-y$$

$$y=1-x_1^2 \Rightarrow x_1=-\sqrt{1-y}$$

تابع مساحت را بر حسب y بازنویسی می‌کنیم.

$$S=(1-y+\sqrt{1-y})y$$

$$\Rightarrow S'=(-1+\frac{-1}{2\sqrt{1-y}})y+(1-y+\sqrt{1-y})=0$$

$\sqrt{1-y}$ را t فرض می‌کنیم:

$$(-1-\frac{1}{2t})(1-t^2)+(t^2+t)=0 \Rightarrow t^2+t=(\frac{2t+1}{2t})(1-t^2) \Rightarrow$$

$$t\cancel{(t+1)}=(\frac{2t+1}{2t})(1-t)\cancel{(1+t)} \xrightarrow{t\neq -1} 2t^2=2t-2t^2+1-t \Rightarrow$$

$$4t^2-t-1=0 \xrightarrow{t>0} t=\frac{1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow x_1=-t=-\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

(کاربرد مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$✓ $\boxed{4}$